BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABN8108
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 08/19/93 CC STAT mm E/L 1
010: : |a AC 34002500
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B47540
035/2: : |a (CaOTULAS)160037284
040: : |a RPB |c RPB |d MiU
050/1:0 : |a AS182 |b .L3 no.1
100:1 : |a Grassmann, Hermann, |d 1809-1877.
245:00: |a Geometrische analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische charakteristik ... |c von H. Grassmann; mit einer erläuternden abhandlung von A. F. Möbius.
260: : |a Leipzig, |b Weidmann'sche buchhandlung, |c 1847.
300/1: : |a 2 p. L., 79, [1] p. |b diagrs. |c 28 cm.
490/1:1 : |a Preisschriften gekrönt und hrsg. von der Fürstlich Jablonowski'schen gesellschaft zu Leipzig. |v 1
590/1: : |a MiU copy imperfect: Cover destroyed in binding.
650/1: 0: |a Ausdehnungslehre
700/1:1 : |a Möbius, August Ferdinand, |d 1790-1868.
830/1: 0: |a Preisschriften (Fürstlich Jablonowsk'sche Gesellschaft zu Leipzig) ; |v 1
998/1: : |c RSH |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

GEOMETRISCHE ANALYSE

GEKNÜPFT AN DIE

VON LEIBNIZ ERFUNDENE

GEOMETRISCHE CHARAKTERISTIK.

GEKRÖNTE PREISSCHRIFT

VON

H. GRASSMANN.

MIT EINER ERLÄUTERNDEN ABHANDLUNG

VON

A. F. MÖBIUS.

LEIPZIG

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG

1847.

H. GRASSMANN'S

GEOMETRISCHE ANALYSE,

Bearbeitung der von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft gestellten Preisaufgabe, die Wiederherstellung und weitere Ausbildung des von Leibniz erfundenen geometrischen Kalkuls oder die Aufstellung eines ihm ähnlichen Kalkuls betreffend.

Etsi omnis methodus licita est, tamen non omnis expedit.
LEIBNIZ.

Gekrönt am 1. Juli 1846.

Wenn die eigenthümliche Kraft eines über seine Zeit hervorragenden Geistes schon *darin* sich offenbart, dass er die Ideen, auf welche die Zeitentwickelung hindrängt, aufzufassen und fortzubilden weiss, und er so als Repräsentant seiner Zeit erscheint: so tritt jene Kraft noch eigenthümlicher hervor in solchen Gedankenreihen, welche der Zeit vorangehen und ihr auf Jahrhunderte die Bahn der Entwickelung gleichsam vorzeichnen. Während die Ideen ersterer Art, wenn eben die Zeit bis zu einem solchen Punkte der Entwickelung herangereift war, oft gleichzeitig von den hervorragenden Geistern der Zeit ausgebildet wurden (wie z. B. die Differenzialrechnung gleichzeitig von Newton und Leibniz): so erscheinen die der letzteren Art als das besondere Eigenthum des Einzelnen, als die innerste Werkstätte seines Geistes, in welche nur wenigen Geweihten derselben Zeit vergönnt ist einzutreten und ahnend gleichsam anzuschauen den Reichthum der Entwickelung, welcher von da aus über eine künftige Zeit sich ausbreiten wird. Während jene ersten Gedankenreihen in der Zeit, in welcher sie hervortreten, da sie eben den Höhenpunkt dieser Zeit selbst darstellen, mächtigen Anklang finden, grosse Bewegungen und Entwickelungen hervorrufen: so verhallen diese meistens fast wirkungslos in der Gleichzeit, indem sie nur von wenigen verstanden werden, und von keinem vielleicht ganz. Oft erst nach Jahrhunderten, wenn die Zeit bis zu demjenigen Punkte der Entwickelung gediehen ist, welchen jene Geisteskraft vorbildend schuf, wird dann jener Gedanke eine Aussaat für eine reiche Aerndte. Dass nun die grossartige Idee Leibnizens, deren Auffassung und Fortbildung den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, nämlich die Idee einer wahrhaft geometrischen Analyse, zu diesen vorbildenden und gleichsam prophetischen Ideen gehört, kann keinen Augenblick zweifelhaft sein, wie sie denn auch das Schicksal solcher Ideen getheilt hat. Ja durch eine besondere Ungunst der Verhältnisse ist dieselbe bis weit über den Zeitpunkt hinaus verborgen geblieben, von welchem an sie hätte kräftig in die Zeitentwickelung eingreifen können. Denn ehe noch jene Leibnizsche Idee durch Uylenbroek aus der Verborgenheit hervorgezogen wurde, waren schon von verschiedenen Seiten her Wege zu einer ganz verwandten Analyse angebahnt. Dessenungeachtet erscheint es als eine wichtige Aufgabe, durch jene Idee, und durch die besondere Gestaltung, welche ihr Leibniz verliehen hat, die verwandte Analyse der Neueren zu befruchten und so den lange todt gelegenen Keim ins Leben zu rufen. Denn

wenn auch durch jene mehr als hundertjährige Verborgenheit jene Idee gleichsam ausgeschieden ist aus dem historischen Entwickelungsprocesse: so ist sie dennoch, indem sie nun hervortritt, keinesweges eine schon veraltete, sondern schliesst einen noch frischen und lebenskräftigen Keim in sich, dem nun sein Recht, mit der historischen Entwickelung zu verwachsen, nicht länger vorenthalten werden darf. Denn einerseits ist das Ideal dieser geometrischen Analyse, wie es Leibnizen als Ziel einer künftigen Entwickelung vorschwebte, keinesweges schon vollkommen erreicht, noch von den Mathematikern hinreichend als solches erkannt, andererseits ist auch die eigenthümliche Gestaltung, welche er dieser Idee durch seine freilich mehr beispielsweise gegebene Bezeichnungsart verliehen hat, keinesweges schon durch einen neueren Mathematiker auf ähnliche Weise ausgebildet worden; vielmehr sind alle Neueren von andern, wenn auch oft — dem Fortschritte der Zeit gemäss — von viel fruchtbareren Gesichtspunkten ausgegangen.

Leibniz selbst unterscheidet auf das Bestimmteste seinen Gedanken einer rein geometrischen Analyse, deren Ausbildung und Vollendung ihm als ein fernes Ziel vor Augen schwebte, deren Wichtigkeit er aber gleichwohl vollkommen erkannte, und andererseits seinen Versuch einer neuen Charakteristik, welchen er daran anschliesst, um die Möglichkeit der Verwirklichung jenes Gedankens glaublicher zu machen, und der Nachwelt, wenn er selbst an der Ausführung gehindert werden sollte, ein Denkmal zu hinterlassen, welches irgend einem Andern späterhin zur Verwirklichung jenes Gedankens Veranlassung geben möchte. Beides ist daher immer scharf auseinander zu halten, wenn man das Verdienst Leibnizens um die Ausbildung der geometrischen Analyse richtig würdigen will. In der That überzeugt man sich leicht, dass die von Leibniz versuchte Charakteristik nicht im mindesten das leistet, was er von der geometrischen Analyse überhaupt verheisst, dass sie vielmehr hinter dem von ihm selbst gesteckten Ziele so unendlich weit zurückbleibt, dass sie nur als ein roher, wenn gleich sehr anerkennungswerther Anfang zu einer Annäherung an jenes Ziel angesehen werden kann. Auch kann man nicht behaupten wollen, Leibniz habe noch andere Bezeichnungsarten in Bereitschaft gehabt, welche der Erreichung jenes Zieles näher ständen, denn dann würden sie auch die Erreichbarkeit desselben glaubhafter gemacht haben, und also von ihm entweder geradezu statt jener andern Bezeichnungsarten angeführt, oder doch wenigstens andeutungsweise berührt sein, wovon sich keine Spur findet. Man würde somit ein ganz schiefes und ungerechtes Urtheil über Leibnizens Leistungen auf diesem Gebiete gewinnen, wenn man nicht eben streng festhielte, dass er jene Vorzüge, welche er der geometrischen Analyse überhaupt in reichem Masse zuspricht, keinesweges seinem Versuche als schon beiwohnend zuschreiben will.

Woher aber nun, wenn es so steht, diese gewaltigen Lobsprüche über eine Sache, deren Gestaltung er nicht kannte? woher dies entschiedene Anpreisen ihrer Wichtigkeit, dies Aufzählen aller der ans Unglaubliche gränzenden Früchte, die sie tragen müsste auch für alle verwandten Gebiete des Wissens? Wir können hierauf nur antworten, dass darin eben eine besondere Bevorzugung eines höher begabten Geistes besteht, dass er die Wichtigkeit

eines Gedankens bis in seine fernsten Folgerungen hinein vorahnend anschaut, während kleinere Geister, das Geringfügige für wichtig haltend, an dem wahrhaft Grossen gedankenlos vorübergehn. Eben dies hervorragende Talent Leibnizens, eine ganze Entwickelungsreihe, ohne sie durchzumachen, dennoch ahnend zu überschauen, und ohne sie vorher zu zergliedern und auseinander zu legen, sie dennoch mit prophetischem Geiste sich zu vergegenwärtigen und so ihre Folgewichtigkeit zu erkennen, dies Talent ist es eben, was ihn zu so grossartigen Entdeckungen fast auf allen Gebieten des Wissens geführt hat. Ich hoffe im Verlauf dieses Aufsatzes zu zeigen, dass, abgesehen von einzelnen Uebertreibungen, welche aber überall mehr im Ausdrucke als in der Sache selbst liegen, Leibniz hier durchaus recht gesehen, indem ich eine Analyse wenigstens in ihren Grundzügen aufstellen werde, welche im Allgemeinen wirklich das leistet, was er als das Ziel der geometrischen Analyse ansieht; ja es wird sich zeigen, dass selbst die wesentlichen Vorzüge dieser Analyse von ihm mit einer gewissen Vollständigkeit aufgezählt sind. Hierdurch wird sich dann am besten die wissenschaftliche Bedeutung seiner Idee einer geometrischen Analyse darlegen.

Um auch andrerseits die wissenschaftliche Bedeutung seiner eigenthümlichen Charakteristik ans Licht treten zu lassen, und damit sein wissenschaftliches Verdienst auf diesem Gebiete auch nach der andern Seite hin zur Anschauung zu bringen, will ich bei der Ableitung und Entwickelung der neuen Analyse *den* Weg einschlagen, dass ich von der Leibnizschen Charakteristik ausgehe und zeige, wie von diesem Keime aus bei konsequenter Durchführung und Fortentwickelung, bei gehöriger Ausscheidung des Fremdartigen und Befruchtung durch die Ideen der geometrischen Verwandtschaften, die Analyse hervorgeht, welche ich als die wenn auch nur relative Verwirklichung der Leibnizschen Idee einer geometrischen Analyse anzusehen geneigt bin. Dass dies nicht der Weg ist, auf welchem ich zu dieser Analyse gelangt bin, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

Das Wesentliche bei der Leibnizschen Bezeichnungsart ist, dass er Punkte, welche ihrer Lage nach unbekannt oder veränderlich sind, gleichfalls zu bezeichnen sich erlaubt, wozu er dann der in der Algebra eingeführten Sitte gemäss die letzten Buchstaben des Alphabets wählt, während er die ihrer Lage nach bekannten oder unveränderlichen Punkte durch die übrigen Buchstaben markirt. Diese Bezeichnung wendet er dann in der von ihm mitgetheilten Probe besonders auf die Kongruenz an, indem er ganz allgemein zwei beliebige Vereine von entsprechenden Punkten kongruent setzt, wenn, ohne dass sich in irgend einem der beiden Vereine die gegenseitige Lage der Punkte ändert, beide zum Decken gebracht werden können, so nämlich, dass jeder Punkt des einen Vereins den entsprechenden des andern deckt, wobei er dann stets die entsprechenden Punkte auf die entsprechenden Stellen der als kongruent bezeichneten Vereine setzt. Diese einfache Betrachtungs- und Bezeichnungsweise wird ihm nun der Keim zu einer Reihe höchst überraschender Resultate; ja er ist dadurch in den Stand gesetzt, wirklich auch schon an dieser Probe nachzuweisen, wie eine rein geometrische Analyse möglich ist, und zwar eine solche, welcher alle räumlichen Beziehungen unterworfen

werden können. In der That sieht man sogleich, wenn man mit Leibniz $\circ$ als Zeichen der Kongruenz wählt, und unter x einen seiner Lage nach veränderlichen Punkt, unter a, b und c aber feste Punkte versteht, dass

$$(1) \quad \ldots \quad ax \circ bc$$

eine Kugel (deren Mittelpunkt a und deren Halbmesser bc ist) und

$$(2) \quad \ldots \quad ax \circ bx$$

eine Ebene (welche ab senkrecht hälftet) als geometrischen Ort des Punktes x liefert. Da nun aber durch Kugel und Ebene (ja schon durch die Kugel allein) sich alle Konstruktionen im Raume ausführen, und somit durch sie alle Arten räumlicher Abhängigkeit sich vermitteln lassen, so folgt, dass das erwähnte Princip ausreichen muss für jede räumliche Betrachtung. Ja es können diese beiden Ausdrücke (1) und (2) als Definitionen der Kugel und Ebene gefasst, und somit auf ihnen das ganze Gebäude der Geometrie selbständig aufgeführt werden. Die Formel (2) kann als Ausdruck für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch 2 feste Punkte a und b gehen, aufgefasst werden. Eben so liefert die Formel

$$(3) \quad \ldots \quad ax \circ bx \circ cx$$

die gerade Linie, als geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch 3 feste Punkte a, b, c gehen. Endlich erscheint die Kreislinie als Durchschnitt zweier Kugeln, also ist ihr Ausdruck

$$ax \circ ac$$
$$bx \circ bc$$

oder zusammengezogen

$$(4) \quad \ldots \quad abx \circ abc.$$

Man sieht hieraus, wie sich alles auf den Ausdruck für die Kugel zurückführen lässt, und daher ein solcher Aufbau der Geometrie auf jenem Fundamentalausdruck (1) vermöge dieser Einheit und Einfachheit des Princips von hoher wissenschaftlicher Bedeutung sein würde. Doch würde es mich zu weit von dem vorgesteckten Ziele abführen, wenn ich auch nur die Grundzüge einer solchen Konstruktion der Wissenschaft hier entwerfen wollte, wozu ja nothwendig die Ableitung der erforderlichen Grundsätze und der Nachweis, dass sie für die Konstruktion der Wissenschaft hinreichen, gehören würde; und diese Untersuchung wird immer eine der schwierigsten bleiben. Dagegen will ich nun die Anwendbarkeit der Leibnizschen Rechnungsmethode an der Lösung der beiden Fundamentalaufgaben der Geometrie prüfen, indem ich den Ausdruck einer durch 2 gegebene Punkte gehenden Geraden und den einer durch 3 gegebene Punkte gehenden Ebene suche. Soll zuerst der Ausdruck einer durch zwei Punkte a und b gehenden Geraden gefunden werden, so muss derselbe die Form des Ausdrucks (3) erhalten, in welchem statt a, b, c 3 Hülfspunkte a', b', c' eingeführt werden müssen, die jedoch nicht in gerader Linie liegen dürfen. Man hat dann die Formeln:

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} a'x \circ b'x \circ c'x, \\ a'a \circ b'a \circ c'a, \\ a'b \circ b'b \circ c'b, \end{cases}$$

welche in ihrer Vereinigung die gerade Linie als geometrischen Ort des Punktes x bestimmen. Man kann hier noch die beiden letzten Kongruenzreihen in Eine zusammenziehen

$$aba' \equiv abb' \equiv abc'.$$

Diese drückt dann aus, dass die Hülfspunkte a', b', c' in einer Kreislinie liegen, deren Ebene von ab senkrecht in dem Mittelpunkte der Kreislinie getroffen wird. Ebenso verwickelt sind die Ausdrücke für eine durch 3 Punkte a, b, c, die nicht in gerader Linie liegen, gehende Ebene. Da der Ausdruck die Form (2) haben muss, so muss man 2 Hülfspunkte a' und b' annehmen, und da a, b, c, x in der durch diese Hülfspunkte bestimmten Ebene liegen müssen, so hat man die 4 Formeln

$$\left.\begin{array}{l} a'x \equiv b'x \\ a'a \equiv b'a \\ a'b \equiv b'b \\ a'c \equiv b'c. \end{array}\right\}$$

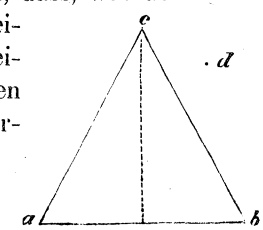
Die drei letzten Kongruenzreihen lassen sich in Eine zusammenziehen, nämlich in

$$abca' \equiv abcb'.$$

Somit hätte man

$$(6) \quad \ldots \quad \left\{\begin{array}{l} a'x \equiv b'x \\ abca' \equiv abcb' \end{array}\right.$$

(von denen übrigens die letzte aus dreien zusammengesetzt ist, und ausdrückt, dass a' und b' symmetrisch gegen abc liegen) als Formeln für die durch die 3 Punkte a, b, c gehende Ebene. Wollte man diesen Systemen von Formeln (5) und (6) die erforderliche Einfachheit geben, so müsste man im Stande sein, die willkührlichen Hülfspunkte, welche mit der Natur der Aufgabe nichts zu thun haben, herauszuschaffen und das System von Formeln jedesmal in eine einzige zusammenzuziehen. Man sieht sogleich, dass dies nach der Leibnizschen Bezeichnung, so weit er sie entwickelt hat, unmöglich ist. Bleibt man daher bei ihr stehen, so ist wohl leicht zu sehen, wie die Menge der Formeln bei einer einigermassen verwickelten Aufgabe bald ins Ungeheure wachsen muss, und wie man dabei eine Menge von Elementen mit in die Betrachtung hineinziehen muss, welche mit der ursprünglichen Aufgabe nichts zu schaffen haben. Man erkennt hier das Ungenügende dieser Charakteristik. Worin beruht dies? Zuerst offenbar darin, dass statt der einfachen Beziehung der Gleichheit, welche allein in mathematischen Formeln hervortreten darf, damit man überall substituiren kann, die Beziehung der Kongruenz eingeführt ist. Wohl gilt für diese Beziehung der Kongruenz das Gesetz, dass, was demselben dritten kongruent ist, es auch unter sich sei; aber keineswegs, dass man überhaupt in einer Kongruenzgleichung statt jedes Ausdrucks den ihm kongruenten setzen könne. Es sei z. B. $ac \equiv bc$ und ein Punkt d liege ausserhalb des von c auf ab gefällten Lothes, so ist *nicht*



$$acd \equiv bcd,$$

obgleich doch

$$ac \;\mathfrak{s}\; bc,$$

so dass man also in $acd \;\mathfrak{s}\; acd$ nicht auf der einen Seite statt ac das ihm kongruente bc setzen darf. Oder noch einfacher, da alle Punkte kongruent sind, so würde man, wenn man das Kongruente sich gegenseitig substituiren könnte, abc kongruent setzen können mit jedem Vereine von 3 beliebigen andern Punkten, was ein Unsinn ist. Diese Möglichkeit der Substitution, welche bei der obigen Bezeichnung abgeschnitten ist, müssen wir aber nothwendig bei jeder mathematischen Bezeichnung aufrecht erhalten, wenn sie zu fruchtreichen Ergebnissen führen soll. Daher haben wir zunächst die Bezeichnung zu ändern, und die wesentliche Beziehung der Gleichheit einzuführen, indem wir nur das als schlechthin gleich setzen, was wir in jedem Urtheile gegenseitig substituiren können. Wir fragen, wenn abc kongruent ist def, was ist dann das Gleiche zwischen beiden Vereinen von Punkten? Offenbar muss dann irgend eine geometrische Funktion der 3 Punkte a, b, c gleich der entsprechenden Funktion der drei Punkte d, e, f gesetzt werden. Wir wollen diese Funktion vorläufig mit dem Zeichen *figura* oder *fig.* bezeichnen, und setzen statt

$$abc \;\mathfrak{s}\; def$$

jetzt

$$\text{fig. } (a, b, c) = \text{fig. } (d, e, f)$$

und ebenso

$$\text{fig. } (a, b) = \text{fig. } (d, e),$$

wenn ab gleich lang ist mit de. Es kommt dann darauf an, die Form dieser Funktion zu finden, namentlich bei zwei Punkten also die Form der Funktion fig. (a, b). Denn die Gleichung

$$\text{fig. } (a, b, c) = \text{fig. } (d, e, f)$$

ist nur eine Zusammenfassung der 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{fig. } (a, b) &= \text{fig. } (d, e) \\ \text{fig. } (b, c) &= \text{fig. } (e, f) \\ \text{fig. } (c, a) &= \text{fig. } (f, d). \end{aligned}$$

Erst wenn es uns gelingt, die Form dieser Funktion auszumitteln und die Gesetze, welchen dieselbe unterliegt, sind wir im Stande vollkommen frei zu substituiren. Um dazu zu gelangen, wollen wir zuerst die Leibnizsche Idee erweitern, indem wir sie auf andere Verwandtschaften übertragen. So könnten wir z. B. bei ähnlichen Figuren sagen, ihre Gestalt sei gleich, und könnten also statt

$$abc \sim def$$

schreiben

$$\text{form } (a, b, c) = \text{form } (d, e, f).$$

So könnten wir die Gleichheit des Flächenraums zwischen je 3 Punkten oder die Gleichheit des Körperraums zwischen je 4 Punkten oder auch die Affinität durch besondere Zeichen ausdrücken.

Wir schreiten indessen sogleich zu der allgemeinsten lineären Verwandtschaft, der Kollineation, und setzen für zwei kollineare Vereine

a, b, c, d, e, f und a', b', c', d', e', f' die Gleichung

$$\text{collin } (a, b, c, d, e, f) = \text{collin } (a', b', c', d', e', f').$$

Unter allen diesen Verwandtschaften erscheint nun allerdings von einer gewissen Seite aus betrachtet die Kongruenz als die einfachste, sofern sich hier alles auf Funktionen von zwei Punkten zurückführen lässt; und in derselben Beziehung erscheint die Kollineation als die verwickeltste, sofern hier 5 Punkte, von denen keine 4 in Einer Ebene liegen, mit beliebigen solchen 5 andern kollinear verwandt gesetzt werden können; und erst für den 6ten Punkt tritt eine Bestimmung ein von der Art, dass, wenn in dem einen System der 6te Punkt gegeben ist, dann der entsprechende 6te des andern Systemes bestimmt ist. Die einfachste Funktion, auf die sich also bei der Kollineation im Raume alles zurückführen lässt, ist eine Funktion von 6 Punkten, und man sieht leicht ein, dass zwei Systeme von beliebig vielen Punkten dann und nur dann kollinear verwandt sein werden, wenn zwischen je 6 Punkten beider Systeme jene einfachste kollineare Beziehung statt findet. Während also die Kongruenz auf eine Funktion zweier Punkte zurückführte, so führt die Kollineation auf eine Funktion von 6 Punkten zurück. Sieht man hingegen auf die Art, wie bei der Kongruenz der zweite und bei der Kollineation der 6te Punkt bedingt ist, so erscheint umgekehrt die Kollineation als die einfachste Verwandtschaft.

Denn wenn zwei Punkte eines Systems und von den ihnen entsprechenden Punkten des kongruenten Systems nur der eine gegeben ist, so kann der andere dann willkührlich auf einer Kugelfläche liegen, welche den ersteren Punkt zum Mittelpunkte und die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte des ersten Systems zum Halbmesser hat; die erste Bestimmung, welche hier eintritt, ist also eine partielle, an den Begriff der Kugelfläche geknüpfte. Hingegen wenn 5 Punkte eines Systems, von denen keine 4 in Einer Ebene liegen, und 5 entsprechende Punkte eines kollinear verwandten Systems, von denen dann auch keine 4 in Einer Ebene liegen dürfen, gegeben sind, so ist zu jedem 6ten Punkt des ersten Systems der entsprechende des andern vollkommen bestimmt, und die erste Bestimmung also, welche bei der Kollineation hervortritt, ist eine vollkommene. Auch ist bekannt, dass die Art, wie der 6te Punkt des kollinear verwandten Systems von den gegebenen Punkten abhängt, nur durch Ebenen (oder, wenn man will, durch gerade Linien) vermittelt ist, während die Kongruenz durch Kugelflächen vermittelt war. Nun schliesst aber der Begriff der Kugelfläche den der Ebene ein, in sofern die letztere als Kugelfläche mit unendlich entferntem Mittelpunkte aufgefasst werden kann, hingegen nicht umgekehrt dieser jenen; denn es lässt sich ein selbständiger Theil der Geometrie ausbilden, in welchem der Begriff der Kugel auch nicht einmal der Anlage nach vorausgesetzt ist, wie dies von Grassmann in seiner Ausdehnungslehre nachgewiesen ist. Es erscheint also in Bezug auf die Art der Abhängigkeit — und auf diese kommt es bei der vorliegenden Untersuchung nur an — die Kollineation als die einfachere Verwandtschaft.

Daher gehe ich von dieser aus, betrachte jedoch zunächst nur kollineare Systeme in derselben Ebene. Da lassen sich dann zu 4 Punkten, von denen keine 3 in Einer geraden Linie liegen, beliebige 4 andere solche Punkte als entsprechende eines kollinear verwandten Systems setzen, aber dann ist zu jedem 5ten Punkte des einen Systems der entsprechende des kollinear ver-

wandten Systems vollkommen bestimmt, und es fragt sich, welches die Art dieser Bestimmung ist. Um mich im Folgenden kürzer ausdrücken zu können, will ich sagen, die gerade Linie, welche durch 2 Punkte geht, sei aus diesen Punkten, und der Durchschnittspunkt zweier Geraden aus diesen Geraden durch lineale Konstruktion abgeleitet; und zwar die Gerade zwischen zwei Punkten a und b sei aus diesen Punkten, oder der Durchschnittspuukt zweier Geraden A und B sei aus diesen Geraden durch die entsprechende Konstruktion abgeleitet, wie die Gerade zwischen den beiden Punkten a' und b' aus diesen Punkten oder der Durchschnittspunkt zweier Geraden A' und B' aus diesen Geraden abgeleitet ist. Wenn nun a, b, c, d, e und a', b', c', d', e' entsprechende Punkte zweier kollinearen ebenen Vereine sind, also

$$\text{collin } (a, b, c, d, e) = \text{collin } (a', b', c', d', e')$$

ist, so folgt aus dem Princip der Kollineation (s. Möbius baryc. Kalkul §. 217), dass, wenn e aus a, b, c, d durch lineale Konstruktionen sich ableiten lässt, dann e' sich aus a', b', c', d' durch die entsprechenden Konstruktionen ableiten lasse. Ferner ist bekannt (s. Möb. bar. Kalk. §. 205), dass, wenn von den Punkten $a, b, c, d,$ welche in Einer Ebene liegen, keine 3 in gerader Linie liegen, jeder andere Punkt derselben Ebene sich durch lineale Konstruktionen entweder genau, oder so annähernd, als man will, ableiten lässt; also genügt das erwähnte Princip der linealen Konstruktion für die Auffassung der obigen Kollineationsgleichung. Man sieht also, dass die ganze Art, wie der 5te Punkt von den 4 übrigen abhängt, nur gegründet ist auf jene einfachen Konstruktionen, und dass also, wenn man den fünften Punkt analytisch ausdrücken will durch die vier andern, man nur die Verbindungslinie zweier Punkte als Verknüpfuug derselben und den Durchschnitt zweier Geraden als Verknüpfung dieser Geraden ausdrücken und die Gesetze dieser Verknüpfungen aufstellen muss. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass weder die Punkte an sich, noch die unendlichen Linien können als Grössen aufgefasst werden, indem zu der Grösse wesentlich gehört ein der Vergrösserung und Verkleinerung fähiger Masswerth (metrischer Werth). Sollen es daher räumliche Grössen sein, welche der Verknüpfung unterworfen werden, so muss man an ihnen ein Zwiefaches unterscheiden, nämlich einerseits ihre Lage im Raume und andererseits ihren Masswerth, welcher auch möglicher Weise eine blosse Zahlgrösse sein kann; und zwei räumliche Grössen wird man nur dann einander gleich setzen können, wenn sowohl die Lage im Raume, welche an ihr haftet, als auch ihr Masswerth gleich ist. So z. B. stellt der Punkt als solcher nur einen Ort im Raume dar, der Punkt aber, der mit einem bestimmten Zahlkoefficienten behaftet ist, erscheint als räumliche Grösse. Dieser Zahlkoefficient kann eins sein, dann erscheint also der Punkt selbst auch als Grösse, aber nur in sofern an ihm der Zahlkoefficient 1 als besonderer Werth eines der Veränderung fähigen Zahlkoefficienten aufgefasst wird; dadurch erscheint dann auch der Punkt als der Vergrösserung und Verkleinerung fähig, also als Grösse. So erscheint, um ein anderes Beispiel zu geben, ein begränztes Stück einer geraden Linie als räumliche Grösse, indem die Linie (als unendliche) die Lage im Raume darstellt, ihre Länge aber den Masswerth. Wenn der Masswerth einer

Grösse null wird, so verschwindet die Grösse, und sie muss also selbst dann gleich null gesetzt werden. Ich will nun solche mit bestimmten Masswerthen versehene Punkte und Gerade kurzweg Punktgrössen und Liniengrössen nennen, und will unter der Kombination ab zweier Punktgrössen a und b, d. h. zweier Punkte mit zugehörigen Koefficienten, eine Liniengrösse verstehen, deren Linie durch die beiden zu a und b gehörigen Punkte geht, und deren Masswerth späterhin noch festgesetzt werden soll; und ebenso unter der Kombination AB zweier Liniengrössen A und B (d. h. zweier begränzter gerader Linien) eine Punktgrösse, deren Punkt der Durchschnittspunkt der zu A und B gehörigen geraden Linien ist, und deren Koefficient späterhin bestimmt werden soll. Zunächst will ich nur noch die Voraussetzung hinzufügen, dass das Ergebniss dieser Verknüpfung stets einen bestimmten Werth haben soll, um daraus die Fälle zu entwickeln, in denen der Masswerth der durch die Verknüpfung gewonnenen Grössen null wird. Zuerst betrachte ich die Kombination zweier Punktgrössen. Fallen die Punkte beider zusammen, so ist die gerade Linie ihrer Kombination unbestimmt, das Ergebniss der Verknüpfung würde also wider die Voraussetzung unbestimmt sein, wenn man nicht annähme, dass dann der Masswerth null werde. Also wenn die obige Voraussetzung bestehen bleiben soll, so müssen wir die Kombination zweier Punktgrössen null setzen, wenn ihre Punkte zusammenfallen, und aus demselben Grunde die zweier Liniengrössen null setzen, wenn die zugehörigen Linien zusammenfallen. Ferner wenn *von den beiden Punktgrössen die eine gleich null ist*, so kann ihr Punkt jede beliebige Lage haben; also ist dann auch die Linie ihrer Kombination mit der andern Punktgrösse unbestimmt; soll also die Voraussetzung aufrecht erhalten werden, so muss auch in diesem Falle die Kombination null gesetzt werden. Und aus demselben Grunde wird auch die Kombination zweier Liniengrössen null gesetzt werden müssen, wenn eine derselben null ist. Da nun aber auch in keinem andern Falle als den erwähnten die räumliche Lage des Ergebnisses unbestimmt ist, so können wir auch festsetzen, dass in keinem andern Falle das Ergebniss null sein solle. So gelangen wir zu der vorläufigen Definition: «*Zwei Punktgrössen oder zwei Liniengrössen geben kombinirt dann und nur dann null, wenn entweder eine derselben null ist oder beide dieselbe Lage haben.*»

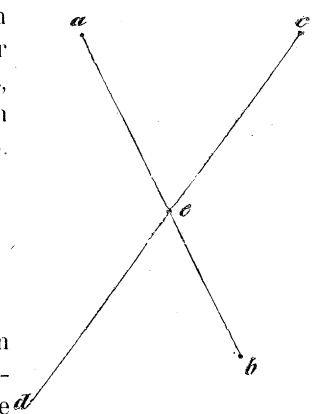
Durch diese Bezeichnungsweise ist man nun im Stande, jede lineale Abhängigkeit in Form einer Gleichung darzustellen, deren eine Seite null ist, während die andere keine andern Verknüpfungen in sich schliesst als die oben bezeichneten, z. B. bedeutet

$$ab = 0,$$

dass die Punkte a und b zusammenfallen, ferner

$$(ab)\,(cd)\,e = 0,$$

dass e der Durchschnittspunkt der beiden Geraden ab und cd ist. Denn $(ab)\,(cd)$ drückt den Durchschnittspunkt der Linien ab und cd aus, und die



Gleichung $(ab)\,(cd)\,e = 0$ drückt aus, dass e mit diesem Punkte zusammenfällt. Auch kann man in solchen Gleichungen statt jeder Punktgrösse oder Liniengrösse, die nicht null ist, eine andere solche von gleicher Lage, d. h. welche mit ihr kombinirt null giebt, substituiren. Auch ist klar, dass man das Princip der Kollineation jetzt auch vermittelst des Begriffs dieser Kombinationsgleichungen so aussprechen kann, dass jede Kombinationsgleichung zwischen den Punkten eines Systems auch auf gleiche Weise zwischen den entsprechenden Punkten des kollinearen Systems statt finde. Es bleibt noch die Kombination einer Punktgrösse mit einer Liniengrösse zu betrachten übrig; für diese haben wir dem Früheren analog nur festzusetzen, dass sie dann, aber auch nur dann null werde, wenn entweder eins der Verknüpfungsglieder null ist, oder der Punkt in der Geraden liegt. Wie fruchtbar schon diese einfache Idee ist, und zu welchen unerwarteten Aufschlüssen über die Natur der Kurven sie führt, hat Grassmann in seiner Abhandlung über diesen Gegenstand in Crelle's Journal f. d. Math. Band 31 gezeigt. Auch ist man dadurch schon im Stande eine Gleichung aufzustellen zwischen 10 Punkten der Ebene, von denen fünf den fünf übrigen kollinear entsprechen sollen; denn man hat nur nöthig die bekannte Konstruktion des fünften entsprechenden Punktes vermittelst des Lineals in die eingeführte Bezeichnungsweise umzusetzen, um zu dieser Gleichung zu gelangen. Doch würde dieselbe in sehr komplicirter Gestalt erscheinen und keinesweges geeignet sein, um das Wesen der Kollineation unmittelbar darzustellen. Um zu einer solchen Gleichung, die dies in der That leistet, zu gelangen, müssen wir den Begriff der Kombination dadurch erweitern, dass wir auch auf die Masswerthe Rücksicht nehmen. Hierbei kann uns die Analogie mit der Multiplikation, welche hier sogleich in die Augen springt, leiten. Diese Analogie zwischen der Multiplikation und der Kombination der Punktgrössen und Liniengrössen zeigt sich nach dem bisher bemerkten besonders darin, dass, wenn eins der Verknüpfungsglieder bei der Kombination null ist, auch das Ergebniss derselben null ist, und dass, wenn das Ergebniss null ist, es auch null bleibt, wenn man die Masswerthe derjenigen Verknüpfungsglieder, die nicht null sind, in beliebigem Verhältnisse wachsen oder abnehmen lässt. Wir dehnen daher diese Analogie noch weiter aus, indem wir, wenn α und β Zahlgrössen, A und B Punktgrössen oder Liniengrössen sind, $(\alpha A)\,(\beta B) = \alpha\beta\,(AB)$ setzen. Sind also z. B. A und B Punkte, so ist die Kombination der Punktgrössen gleich der mit dem Produkte der Koefficienten multiplicirten Kombination der Punkte. Die wesentliche Bedeutung der Multiplikation liegt (siehe Grassmanns Ausdehnungslehre §. 10) in ihrer Beziehung zur Addition, dass man nämlich, statt eine Summe zu multipliciren, ohne Aenderung des Ergebnisses auch ihre Stücke einzeln auf gleiche Weise multipliciren und diese Produkte addiren könne. Wir haben daher zu versuchen, ob wir nicht den Begriff der Addition der Punktgrössen und der Liniengrössen, so wie auch die Bestimmung der Masswerthe der jetzt als Produkte aufgefassten Kombinationen, in der Art zu vollziehen vermögen, dass jene Beziehung der Multiplikation zur Addition und Subtraktion ihre Geltung behalte. Wir nehmen an, die Summe zweier Punktgrössen sei wieder eine Punktgrösse, und betrachten zuerst die Summe zweier Punkte $a + b$. Da nach dem Begriffe jeder Summe $a + b =$

$b + a$ sein und die Summe eine bestimmte Grösse sein muss, so ergiebt sich, dass der Summenpunkt gegen a und b gleiche Lage haben und seiner Lage nach bestimmt sein muss, also dass sein Ort nur die Mitte zwischen a und b sein kann. Es sei s die Mitte zwischen a und b, und x der Koefficient der Summe, also

$$(7) \quad \ldots \quad xs = a + b.$$

Soll nun die multiplikative Beziehung gelten, so muss

$$xss = sa + sb$$

sein; also da ss null ist (als Kombination zusammenfallender Punkte), so hat man

$$0 = sa + sb \text{ oder } sa = -sb,$$

d. h. sa und sb (was zwei gleich lange aber entgegengesetzt gerichtete Strecken sind) müssen für die in Rede stehende Analyse als gleiche aber entgegengesetzte Grössen aufgefasst werden. Ferner durch Multiplikation mit a hat man

$$xas = aa + ab = ab,$$

da aa null ist. Nun ist ab doppelt so lang als as und gleichgerichtet mit as Bezeichne ich das Doppelte von as, wenn es in derselben Linie nach gleicher Richtung liegt, mit $2as$, so ist also $ab = 2as$, mithin

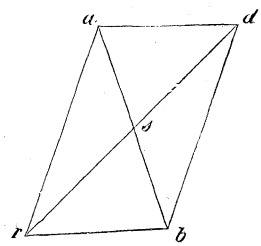
$$xas = 2as,$$

also $x = 2$ und somit

$$(8) \quad \ldots \quad a + b = 2s,$$

d. h. die Summe zweier Punkte ist ihre Mitte mit dem Koefficienten 2. Betrachte ich nun irgend einen Punkt r, so muss, wenn die Beziehung der Multiplikation zur Addition allgemein gelten soll,

$$(9) \quad \ldots \quad ra + rb = r(a + b) = 2rs$$



sein. Daraus folgt sogleich, dass die Summe von ra und rb die Diagonale rd des Parallelogramms $arbd$ ist und dass, wenn ra und rb dieselbe Richtung haben, die Summe so gross ist als beide Stücke zusammengenommen, dass also dann die Summe dieselbe ist, als wenn man beide Strecken wie Zahlgrössen addirte. Namentlich ist, wenn a, b, c Punkte derselben geraden Linie sind, allemal $ab + bc = ac$. Hieraus folgt dann auch, dass αab, wo α eine Zahl ist, als eine Liniengrösse aufzufassen ist, welche dieselbe Lage hat, aber α mal grösser ist als ab; und dass also die Strecke ab genau den Masswerth der Kombination ab darstellt, während die Linie ab als unendliche ihre Lage darstellt. Nun lässt sich auch die Summe $\alpha a + \beta b$, wo α und β Zahlen, a und b Punkte sind, leicht ausmitteln, wenn $\alpha + \beta$ nicht null ist. Nämlich es sei

$$\alpha a + \beta b = xs,$$

so muss für jeden Punkt r

$$r(\alpha a + \beta b) = xrs \text{ d. h.}$$

$$(10) \quad \ldots \quad \alpha ra + \beta rb = xrs$$

sein, also namentlich auch wenn r in s fällt, also rs null ist. Dann hat man

$$(11) \quad \ldots \quad \alpha sa + \beta sb = 0$$

d. h. s ist der Schwerpunkt zwischen den Punkten a und b, wenn diesen Gewichte beigelegt sind, die den Zahlen α und β proportional sind. Ferner fällt in der Gleichung (10) r in a, d. h. wird ra null, so hat man

$$\beta ab = xas,$$

und wenn in (10) r gleich b, also rb null wird,

$$\alpha ba = xbs.$$

Also die zweite Gleichung subtrahirt von der ersteren

$$\beta ab - \alpha ba = x(as - bs)$$

oder da $-ba = ab$, $-bs = sb$ und $as + sb = ab$ ist,

$$(\beta + \alpha)\, ab = xab,$$

also $x = \alpha + \beta$, also

$$(12) \quad \ldots \quad \alpha a + \beta b = (a + \beta)\, s.$$

Also die Summe zweier Punktgrössen, deren Koefficientensumme nicht null ist, ist der Schwerpunkt mit einem Koefficienten, der die Summe jener Koefficienten ist. Wie man nun diese Verknüpfung der Punkte oder Punktgrössen, die wir hier als Addition bezeichnet haben, in der That als solche nachweisen kann, wie daraus eine entsprechende Subtraktion sich entwickelt, wie als die Differenz zweier Punkte eine Strecke von konstanter Richtung und Länge erscheint[1]), wie daraus eine Addition und Subtraktion solcher Strecken hervorgeht, alles das kann hier nicht der Betrachtung unterworfen werden, da dies schon aus den Werken und Abhandlungen von Möbius und Grassmann als bekannt vorausgesetzt werden darf, und jetzt schon klar zu Tage liegt, wie man auf dem hier eingeschlagenen Wege weiter fortschreiten kann, um auch zu diesen Verfahrungsarten und Gesetzen zu gelangen. Doch werde ich weiter unten diese Gesetze wenigstens für Punkte und deren Vielfache entwickeln. Aus eben dem Grunde kann ich hier nicht darauf eingehen, zu zeigen, wie die hier als Kombination bezeichnete Verknüpfung mit der algebraischen Multiplikation unter einen Begriff zusammengefasst werden kann, wobei ich für die erstere den Namen der äusseren oder kombinatorischen Multiplikation beibehalte, wie ferner sich hieraus eine Multiplikation der Strecken (als Linien von konstanter Richtung und Länge) und der Punktgrössen mit den Strecken entwickelt, wie ferner die Liniengrössen unter sich und mit Punktgrössen kombinatorisch multiplicirt werden können und daraus wieder entsprechende Gesetze für die Multiplikation von Flächenräumen unter sich und mit Strecken hervorgehen. In Bezug auf alles dies muss ich auf Grassmanns Ausdehnungslehre verweisen. Daher schreite ich, nachdem ich noch die Anwendung auf die Kollineation gegeben, zu der Entwickelung der wirklich neuen Rechnungsmethoden,

---

1) Um Missverständnissen vorzubeugen, will ich hier noch bemerken, dass die Liniengrösse ab und die Strecke $b - a$ hiernach zwar eine verwandte, aber doch eine wesentlich verschiedene Bedeutung haben, insofern die Gleichung $b - a = d - c$ *nur* ausdrückt, dass die von a nach b gezogene Linie gleich lang und gleichgerichtet ist mit der von c nach d gezogenen, wohingegen die Gleichung $ab = cd$ nicht nur dies ausdrückt, sondern zugleich, dass ab und cd Theile einer und derselben unendlichen geraden Linie sind.

wobei ich aber die in den angeführten Schriften gewonnenen Ergebnisse voraussetzen muss. Wir suchten oben die Form der Kollinear-Funktion. Nun ergiebt sich, wenn

$$\text{collin}\ (a, b, c, d, e) = \text{collin}\ (a', b', c', d', e')$$

gesetzt ist und unter abc der Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken a, b und c sind, verstanden ist, und zwar als positiv genommen, wenn c von ab aus nach links liegt, dass dann (Ausdehnungslehre §. 165)

$$\frac{eab}{dab} : \frac{ebc}{dbc} = \frac{e'a'b'}{d'a'b'} : \frac{e'b'c'}{d'b'c'}$$

ist. Doch ist durch Eine solche Beziehung der Punkt e' noch nicht durch die übrigen bestimmt, also die kollineare Beziehung nicht vollständig ausgedrückt; wohl aber genügen zwei solche Beziehungen, also

$$\left(\frac{eab}{dab} : \frac{ebc}{dbc} : \frac{eca}{dca}\right) = \left(\frac{e'a'b'}{d'a'b'} : \frac{e'b'c'}{d'b'c'} : \frac{e'c'a'}{d'c'a'}\right),$$

wo die Klammer auf beiden Seiten die Gleichheit je zweier entsprechender durch das Zeichen : gegliederter Verhältnisse ausdrücken soll, und wir können also

$$(13) \quad \ldots \quad \left(\frac{eab}{dab} : \frac{ebc}{dbc} : \frac{eca}{dca}\right)$$

als die gesuchte Kollinear-Funktion für die Ebene ansehen. Für den Raum würde man übrigens, wenn unter $abcd$ der Inhalt des Tetraeders verstanden ist, dessen Ecken a, b, c, d sind, aus

$$\text{collin}\ (a, b, c, d, e, f) = \text{collin}\ (a', b', c', d', e', f')$$

erhalten:

$$(14) \quad \ldots \quad \left(\frac{fabc}{eabc} : \frac{fbcd}{ebcd} : \frac{fcda}{ecda} : \frac{fdab}{edab}\right)$$

gleich dem entsprechenden Ausdruck in a', b', c', d', e', f', worin dann die Gleichheit dreier Verhältnisse ausgedrückt liegt, und der Ausdruck (14) würde selbst die Kollinear-Funktion für den Raum darstellen.

Die Ableitung der neuen Rechnungsmethode knüpfe ich nun wieder an Leibnizens Idee an, indem ich von der nach der einen Seite hin einfachsten Verwandtschaft, der Kollineation, sogleich zu der nach der andern Seite hin einfachsten, der Kongruenz, schreite, von welcher Leibniz ursprünglich ausgegangen war; und durch die bisher aus der Kollineation abgeleiteten oder vielmehr als ableitbar nachgewiesenen und nun als bekannt vorausgesetzten Verknüpfungen wird es nun möglich, auch die Kongruenz auf entsprechende Weise zu behandeln. Aus den bisher betrachteten Verknüpfungsweisen nämlich lässt sich das Princip der Kongruenz *nicht* ableiten, da sich jene nur auf das Ziehen von geraden Linien oder das Hindurchlegen von Ebenen durch gegebene Punkte beziehen, aber nicht die Natur des Kreises oder der Kugel mit in sich aufnehmen, wie dies bei der Kongruenz der Fall ist. Da sich auch der bisher erschienene Theil von Grassmanns Ausdehnungslehre nur auf solche Verknü-

pfungsweisen erstreckt, welche bloss von den Begriffen der geraden Linie und der Ebene abhängen, so werden wir auch in diesem Werke, mit Ausnahme einiger Andeutungen in der Vorrede desselben, keine Entwickelungen mehr vorfinden, welche den im Folgenden darzulegenden Verknüpfungsweisen zur Seite gehen. Deshalb werde ich von nun an, um an Schärfe nichts vermissen zu lassen, *den* Weg wählen, dass ich jedesmal nach Ableitung eines Begriffes diesen Begriff in Form einer Definition noch einmal hinstelle, und die Gesetze, welche daraus entspringen, ohne irgend einen bei der Ableitung des Begriffes vorläufig angewandten Satz vorauszusetzen, in streng mathematischer Form entwickeln.

Der einfachste Kongruenzfall, auf den sich jeder andere zurückführen liess, war der, dass zwei gleich lange gerade Linien als kongruent gesetzt wurden, also

$$(15) \quad \ldots \quad \text{fig. } (a, b) = \text{fig. } (c, d),$$

wenn der Linientheil ab gleich lang war mit dem Linientheile cd. Nun haben wir oben gleiche Liniengrössen und gleiche Strecken kennen gelernt. Die Liniengrössen ab und cd wurden dann, aber auch nur dann einander gleich gesetzt, wenn beide in derselben geraden Linie liegen und gleiche (nicht entgegengesetzte) Richtung vom Anfangspunkt zum Endpunkt hin gerechnet und gleiche Länge hatten. Die Strecke hingegen haben wir als Differenz zweier Punkte auffassen, und $a - b$ und $c - d$ dann, aber auch nur dann gleichsetzen müssen, wenn beide Strecken (die von b nach a und die von d nach c) gleiche Richtung und Länge hatten. Daraus folgt, dass, wenn zwei begränzte Gerade, z. B. die von a nach b und die von c nach d als Liniengrössen gleich sind, d. h. $ab = cd$ ist, sie auch als Strecken gleich sein müssen, also $b - a$ gleich $d - c$ sein müsse, aber nicht umgekehrt, indem, wenn $b - a$ gleich $d - c$ ist, nur dann auch ab gleich cd sein wird, wenn a, b, c, d in derselben Geraden liegen. Ferner folgt, dass, wenn jene begränzten Linien als Strecken gleich waren, also $b - a$ gleich $d - c$ war, sie auch kongruent oder gleich lang sein werden, aber nicht umgekehrt, indem aus der gleichen Länge nur dann die Gleichheit der Strecken folgt, wenn ihre Richtung als gleich angenommen wird. Die Kongruenz schliesst sich also zunächst an die Gleichheit der Strecken an, und wir werden, da jedesmal, wenn

$$a - b = c - d$$

ist, auch

$$\text{fig. } (a, b) = \text{fig. } (c, d)$$

ist, fig. (a, b), was die Länge der von a nach b gezogenen geraden Linie vorstellt, als Funktion von $a - b$ betrachten und daher, wenn f das Zeichen dieser Funktion ist, statt fig. (a, b) schreiben können $f(a - b)$ und also statt der Gleichung (15) die Gleichung

$$(16) \quad \ldots \quad f(a - b) = f(c - d)$$

erhalten. Dadurch haben wir den Vortheil, die Länge als Funktion einer einzigen Grösse aufgefasst zu haben. Wir haben nun dieser Funktion eine solche Form zu geben, dass die Gleichung (16) allemal dann, aber auch nur dann richtig ist, wenn $a - b$ und $c - d$ gleich lang sind. Um eine solche Funktion

zu finden, nehmen wir zuerst an, alle zu betrachtenden Grössen seien in derselben Geraden. Hier können zwei gleich lange Linientheile nur entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Im ersteren Falle sind sie als Strecken gleich, im letztern ist die eine Strecke das Negative der andern. Bedeutet also p eine Strecke, so ist p gleich lang mit $(-p)$; aber ausser diesen beiden p und $(-p)$ giebt es auch in derselben geraden Linie keine mit p gleich lange Strecke. Es würde also hier nur folgen, dass $f(p)$ eine solche Form haben muss, dass $f(p) = f(-p)$ sei. Könnte man die Strecken innerhalb einer Geraden wie Zahlen behandeln, so würde p^2 eine solche Funktion und zwar die einfachste sein, welche dieser Bedingung genügte. Wir haben also zunächst nur zu untersuchen, ob und wie weit die Gesetze der Zahlenverknüpfungen sich auf Strecken derselben Geraden anwenden lassen, oder überhaupt ob sie sich auf Grössen anwenden lassen, welche, wie die Strecken derselben geraden Linie, einer Reihe von Zahlgrössen proportional gesetzt werden können. *Ich setze nämlich «eine Reihe von räumlichen Grössen A, B, ... proportional einer Reihe von Zahlgrössen α, β, ..., wenn es irgend eine räumliche Grösse M (die nicht null ist) von der Art giebt, dass* $A = \alpha M$, $B = \beta M$[1]*, ... u. s. w. ist, und nenne in diesem Falle jene räumlichen Grössen unter sich gleichartig; wenn ferner zwei Reihen räumlicher Grössen derselben Reihe von Zahlgrössen proportional sind, so nenne ich sie selbst einander proportional*[2].» Daraus folgt sogleich, «*dass, wenn eine Reihe räumlicher Grössen A, B, ... einer Zahlreihe α, β, ... proportional ist, und diese wieder einer andern Zahlreihe proportional ist, auch die Reihe räumlicher Grössen der letzten Zahlreihe proportional sei*[3]);» denn jede mit der Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots$ proportionale Zahlreihe wird in der Form $\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots$ dargestellt werden können, wo ϱ jede beliebige Zahlgrösse, die nicht null ist, sein kann; setzt man nun $M' = \frac{M}{\varrho}$, so ist $A = \alpha\varrho M'$, $B = \beta\varrho M'$ u. s. w., d. h. $A, B, \ldots$ verhalten sich auch wie $\alpha\varrho : \beta\varrho : \ldots$, d. h. wie jede mit $\alpha, \beta, \ldots$ proportionale Zahlreihe. Hat man nun eine algebraische Gleichung, in welcher die Zahlgrössen $\alpha, \beta, \ldots$ vorkommen, und welche von der Art sind, dass sie auch bestehen bleibt, wenn man statt der Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots$ eine ihr proportionale Zahlreihe setzt, so wird man die Gleichung auch dann noch als richtig setzen können, wenn man der Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots$ eine ihr proportionale Reihe von räumlichen Grössen $A, B, \ldots$ substituirt, indem man dann eben nur festzusetzen hätte, dass diese letztere Gleichung keine andere Bedeutung haben soll als die erstere. Nun wird eine solche Gleichung, wie wir sie voraussetzen, die Form haben

$$(17) \quad \ldots \quad F(\alpha, \beta \ldots) = F'(\alpha, \beta \ldots),$$

---

1) Wenn ich eine Grösse als Produkt einer Zahlgrösse α in eine räumliche Grösse A bezeichne, so soll darin ausgedrückt sein, dass für diese Multiplikation die Gesetze der Multiplikation und Division mit Zahlen gelten, namentlich dass $\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A$ und $\frac{\alpha A}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} A$ sei, wovon bei dem folgenden Beweise Gebrauch gemacht wird.

2) *Erklärung* 1.

3) *Satz* 1.

wo die Zeichen F und F' algebraische und homogene Funktionen gleichen Grades darstellen, d. h. zwei Funktionen, deren Glieder alle von der Form $\lambda\alpha^{\mathfrak{a}}\,\beta^{\mathfrak{b}}\ldots.$ sind und alle dieselbe Exponentensumme $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\ldots.$ haben, während λ eine beliebige Zahlgrösse ist. Ist in der That $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\ldots. = x$, und man setzt statt $\alpha, \beta\ldots.$ die proportionale Zahlreihe $\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots.$, wo ϱ eine Zahl, die nicht null ist, vorstellt, so wird dann $F(\varrho\alpha, \varrho\beta, \ldots.)$ gleich $\varrho^x F(\alpha, \beta\ldots.)$ und $F'(\varrho\alpha, \varrho\beta\ldots.) = \varrho^x F'(\alpha, \beta\ldots.)$, also noch

(18) $\ldots. \quad F(\varrho\alpha, \varrho\beta\ldots.) = F'(\varrho\alpha, \varrho\beta\ldots.).$

Setze ich nun in der Gleichung (17) statt der Zahlreihe $\alpha, \beta, \ldots.$ die proportionale Reihe von Raumgrössen $A, B, \ldots.$, so will ich die so hervorgehende Gleichung

$$F(A, B\ldots.) = F'(A, B\ldots.)$$

auch noch eine homogene algebraische Gleichung der räumlichen Grössen $A, B, \ldots.$ nennen und gelange dann zu der folgenden Erklärung:

«*Ich setze eine homogene algebraische Gleichung räumlicher Grössen, welche gleichartig, d. h. einer Reihe von Zahlgrössen proportional sind, dann und nur dann als richtig, wenn die Gleichung, welche dadurch hervorgeht, dass man statt der räumlichen Grössen die ihnen proportionalen Zahlgrössen setzt, eine richtige ist; und von den so hervorgehenden Verknüpfungen der räumlichen Grössen sage ich, dass sie den algebraischen der Zahlgrössen entsprechen*[1].»

Hieraus folgt der Satz: «*dass für gleichartige Raumgrössen alle algebraischen Verknüpfungsgesetze gelten, welche sich durch homogene Gleichungen jener Raumgrössen darstellen lassen, und dass jede homogene Gleichung zwischen gleichartigen Raumgrössen auch für die ihnen proportionalen Raumgrössen gilt*[2].»

Ich habe diesen Satz, den ich hier nur für Strecken innerhalb derselben geraden Linie anzuwenden brauche, darum so allgemein gefasst, weil er für die Uebertragung algebraischer Verknüpfungen auf räumliche Grössen überhaupt von Wichtigkeit ist. Gehe ich nun auf die Gleichung

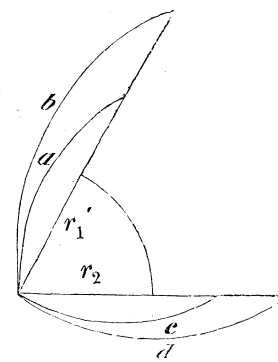
$$f(p) = f(-p)$$

zurück, so leuchtet ein, dass dieser am einfachsten genügt wird, wenn $f(p) = p^2$ gesetzt wird, da ja $p^2 = (-p)^2$ ist, auch wenn p eine Strecke vorstellt. Denn da sich p zu $-p$ wie die Zahlen $1 : (-1)$ verhalten (Erklärung 1), so ist p^2 nach Erklärung 2 gleich $(-p)^2$ zu setzen, wenn $1^2 = (-1)^2$ ist, was der Fall ist. Wir können daher den Versuch machen, auch allgemein, wenn p und q gleich lange Strecken sind, das Quadrat von p gleich dem von q zu setzen. Doch bleibt dann noch zweifelhaft, ob wir dies Quadrat als dem arithmetischen durchaus entsprechend ansehen können, ja ob überhaupt für die Multiplikation, durch welche die beiden gleichen Faktoren dieses Quadrats verknüpft sind, noch irgend ein Multiplikationsgesetz gilt, sobald man es mit Quadraten anders gerichteter Strecken vergleicht, d. h. ob wir eine naturgemässe Hypothese gemacht haben, indem wir jene Funktion $f(p)$ allgemein als Quadrat von p

1) *Erklärung* 2.
2) *Satz* 1, b.

setzten. Jedenfalls müssen wir wenigstens vorläufig die Multiplikation, für die wir jene Hypothese machten, mit einem besonderen Namen bezeichnen. Wir nennen sie innere Multiplikation, und das innere Produkt zweier gleicher Strecken das innere Quadrat dieser Strecke. Somit gelangen wir durch Kombination mit der Erklärung 2 zu folgender Erklärung [1]: «*Unter inneren Produkten je zweier paralleler Strecken verstehe ich solche Grössen, welche den Zahlen proportional gesetzt werden, die hervorgehen, wenn man die beiden parallelen Strecken eines jeden inneren Produktes durch dasselbe Mass misst, und die Quotienten dieser beiden Messungen unter sich multiplicirt, alle Masse aber gleich lang annimmt. Das innere Produkt zweier Strecken sei mit* $a \times b$ *bezeichnet, das innere Quadrat* $a \times a$ *mit* a^2.»

So z. B. sind (s. Fig.) $a \times b$ und $c \times d$ proportional den Zahlen, welche hervorgehen, wenn man a und b durch r_1, c und d durch r_2 misst, wo r_1 und r_2 gleich lang sind und r_1 mit a und b, r_2 mit c und d parallel ist. Aus der Erklärung folgt sogleich, dass $a \times b = b \times a$ und $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ist, wenn a, b, c parallele Strecken sind, in welchen Fällen ja auch die Gleichungen dieselbe Bedeutung haben, wie die in Erklärung 2 definirten. Es kommt nun darauf an, das innere Produkt zweier ungleichlaufender Strecken zu finden. Zu dem Begriffe desselben wird man gelangen, wenn man versucht, die allgemeine Beziehung der Multiplikation zur Addition festzuhalten, und auch die Faktoren vertauschbar zu setzen, damit die innere Multiplikation ungleichlaufender Strecken mit der gleichlaufender unter einen gemeinschaftlichen Begriff falle. Mache ich vorläufig, um zu dem Begriffe dieses Produktes zu gelangen, diese beiden Voraussetzungen, so folgt, dass



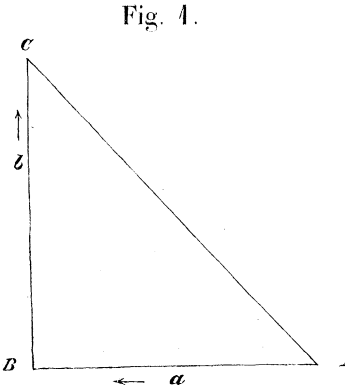
$$(a + b) \times (a + b) = a \times a + b \times b + b \times a + a \times b,$$

also

$$(20) \quad \ldots \quad (a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2.$$

Die Strecke erschien als Differenz zweier Punkte, ist also (s. Fig. 1) $a = B - A$, $b = C - B$, so ist $a + b = B - A + C - B = C - A$; sind daher a und b rechtwinklig gegeneinander, so ist $a + b$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, worin a und b die Katheten sind, also ist

Fig. 1.

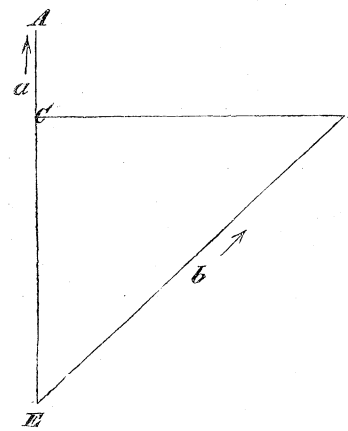


$$(21) \quad \ldots \quad (a + b)^2 = a^2 + b^2$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der obigen (20), so folgt $2a \times b = 0$, also auch $a \times b = 0$, d. h. das innere Produkt zweier

[1]) *Erklärung* 3.

Fig. 2.

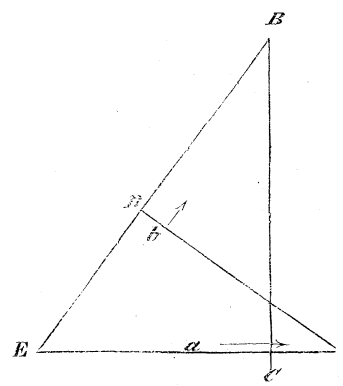


gegeneinander senkrechter Strecken muss null gesetzt werden. Hieraus nun lässt sich der Begriff des inneren Produktes zweier beliebiger Strecken a und b ableiten. Es sei (s. Fig. 2) $a = A - E$, $b = B - E$. Man fälle von B das Loth auf EA, der Fusspunkt desselben sei C, so ist $B - E = B - C + C - E$. Also ist auch $a \times b = (A-E) \times (B-E) = (A-E) \times (B-C+C-E) = (A-E) \times (B-C) + (A-E) \times (C-E)$. Das erste dieser beiden zuletzt gewonnenen Produkte ist null, weil $A-E$ senkrecht gegen $B-C$ ist, also ist $a \times b = a \times (C-E)$; $C-E$ aber ist die senkrechte Projektion von b auf a. Daraus folgt die Erklärung [1]):

«*Unter dem inneren Produkte $a \times b$ zweier nicht paralleler Strecken a und b soll das innere Produkt der ersten a in die senkrechte Projektion der zweiten auf die erste verstanden sein.*»

Von dieser Erklärung aus werde ich nun die Gesetze der inneren Multiplikation zu entwickeln haben, ohne die bei der Ableitung des Begriffs zu Hülfe genommenen Sätze voraussetzen zu dürfen [2]), und zwar erstens:

«*Die beiden Faktoren eines inneren Produktes zweier Strecken kann man ohne Werthänderung des Produktes vertauschen*, d. h. $a \times b = b \times a$ [3]).»



Denn wenn $a = A - E$ (s. Fig.), $b = B-E$, C der Fusspunkt des von B auf AE, und D der Fusspunkt des von A auf BE gefällten Lothes ist, so ist $a \times b = (A-E) \times (C-E)$, $b \times a = (B-E) \times (D-E)$. Vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke ADE und BCE folgt nun, dass die Länge von AE zu der von DE sich verhält, wie die Länge von BE zu der von CE, also auch das Produkt der Längen von AE und CE gleich ist dem Produkte der Längen von DE und BE, also auch, wenn man $A-E$ und $C-E$ durch ein Mass der Linie EA und $D-E$ und $B-E$ durch ein eben so langes Mass der Linie EB

---

1) *Erklärung 4.*

2) Es ist überaus wichtig, die nun folgende mathematische Beweisführung von der bisher versuchten (mehr philosophischen) Ableitung des Begriffes aufs strengste zu sondern. Jene Ableitung diente nur dazu, um den Schein der Willkühr, welcher bei dem unmittelbaren Aufstellen der neuen Definitionen hätte entstehen müssen, verschwinden zu lassen, während die nun folgende Beweisführung von jener Ableitung ganz unabhängig ist und sich unmittelbar an die aufgestellten Definitionen anschliesst. So z. B. wurde bei der Ableitung des Begriffs der pythagoräische Lehrsatz angewandt; die mathematische Beweisführung setzt diesen Lehrsatz *nicht* voraus, vielmehr erscheint derselbe als Folgerung der hier gegebenen mathematischen Entwickelung, welche also zugleich einen vollkommenen Beweis jenes Satzes einschliesst.

3) *Satz 2.*

misst, das Produkt aus den Quotienten der beiden ersten Messungen gleich dem Produkte aus den Quotienten der beiden letzten Messungen sein wird, d. h. nach Erklärung 3

$$(A - E) \times (C - E) = (B - E) \times (D - E)$$

d. h.

$$a \times b = b \times a.$$

Ferner folgt daraus:

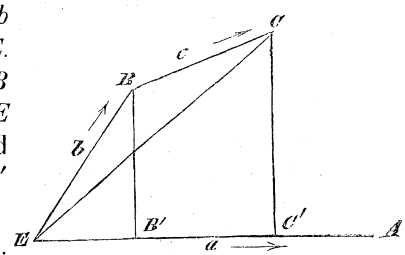
«*Ein inneres Produkt zweier gegeneinander senkrechter Strecken ist null, aber auch kein anderes, dessen Faktoren nicht selbst null sind*[1]).»

Denn wenn beide Strecken senkrecht gegeneinander sind, so ist die senkrechte Projektion der einen auf die andere null, also wird dann, wenn man nach Erklärung 4 statt des zweiten Faktors die senkrechte Projektion desselben auf den ersten setzt, dieser zweite Faktor null, also auch das Produkt null. Hingegen in jedem andern Falle wird, wenn nicht etwa die Strecken selbst null sind, die Projektion nicht null, also auch das Produkt nicht null.

Ferner lässt sich beweisen, dass

(22) . . $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ und $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

ist. Denn es sei (s. Fig.) $a = A - E$, $b = B - E$, $c = C - B$, so ist $b + c = C - E$. Sind ferner B', C' die Fusspunkte der von B und C auf EA gefällten Lothe, so ist $B' - E$ die senkrechte Projektion von b auf a, und $C' - E$ die von $(b + c)$ auf a, und $C' - B'$ die von c auf a; also ist



$$a \times b + a \times c = a \times (B' - E) + a \times (C' - B');$$

und da nun alle Strecken auf der rechten Seite in gerader Linie liegen, so ist die rechte Seite

$$= a \times (B' - E + C' - B')$$
$$= a \times (C' - E)$$
$$= a \times (b + c).$$

Da endlich die Faktoren vertauschbar sind, so folgt auch:

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Also sind die Gleichungen 22 bewiesen. Daraus folgt aber der allgemeine Satz:

«*Alle algebraischen Sätze, welche die Beziehung der Multiplikation zur Addition und Subtraktion ausdrücken, gelten auch für die innere Multiplikation zweier Strecken*[2]),»

weil diese Beziehung eben nur auf dem erwiesenen Grundgesetze (22) beruht (vergleiche Grassmanns Ausdehnungslehre §. 10). Hierdurch ist nun die Benennung und Bezeichnung dieser Verknüpfungsweise als einer Multiplikation gerechtfertigt, zugleich aber, da das Gesetz, dass das innere Produkt zweier

1) *Satz* 3.
2) *Satz* 4.

gegen einander senkrechter Strecken null ist, in der Algebra nichts Entsprechendes findet, diese Multiplikationsweise als eine von der algebraischen wesentlich verschiedene nachgewiesen, weshalb wir die Benennung der inneren Multiplikation zur Unterscheidung sowohl von der algebraischen als auch von der äusseren Multiplikation beibehalten und als das specifische Zeichen dieser Multiplikation das Zeichen $\times$ festhalten. Somit folgt, dass wir nicht nur, wenn a, b, c, d Punkte sind, statt der Gleichung

$$\text{fig. } (a, b) = \text{fig. } (c, d)$$

oder statt

$$ab \ \text{8} \ cd$$

die Gleichung

$$(a - b) \times (a - b) = (c - d) \times (c - d)$$

oder

$$(a - b)^2 = (c - d)^2$$

einführen, sondern nun auch für diese Multiplikation alle bisherigen Sätze anwenden, und dadurch mit dieser Multiplikation ganz frei, wie mit jeder algebraischen Verknüpfung, operiren können. Hiermit ist also die Aufgabe, die wir uns ursprünglich stellten, nämlich die Leibnizsche Charakteristik auf ihren naturgemässen Ausdruck zurückzuführen, gelöst. Zugleich aber liegt in der Art der Lösung der Keim zu einer neuen Entwickelung nach zwei verschiedenen Seiten hin. Nämlich einerseits entsteht die Aufgabe, aus dem Produkte zweier Punktdifferenzen das der Punkte selbst abzuleiten, um so durch die Lösung der Klammern, von welchen noch diese Punktdifferenzen umschlossen sind, zu einer noch freieren und allgemeineren Behandlung dieser die Kongruenz darstellenden Verknüpfung zu gelangen. Der andere Keim zu weiterer Entwickelung liegt in der Beziehung des inneren Produktes zum äusseren. Diese Beziehung wird durch die Idee des senkrecht proportionalen vermittelt. Nämlich «*ich nenne zwei Flächenräume A und B zweien Strecken a und b senkrecht proportional, wenn die Flächenräume auf den Strecken senkrecht stehen und solche Werthe haben, dass, wenn man die eine Strecke b mit ihrem entsprechenden Flächenraum B, ohne die gegenseitige Lage derselben zu ändern, so legt, dass b gleichgerichtet wird mit a, und dann die so verlegte Strecke b durch a und den so verlegten Flächenraum B durch A misst, die Quotienten beider Messungen gleich sind*[1].«

Hieraus folgt der Satz:

«*Zwei innere Produkte je zweier Strecken $a \times b$ und $c \times d$ verhalten sich wie die äusseren Produkte, welche hervorgehen, wenn man statt zweier aus beiden Produkten ausgewählter Faktoren, z. B. statt a und c, die ihnen senkrecht proportionalen Flächenräume A und C setzt und das Zeichen der inneren Multiplikation in das der äusseren verwandelt, also*

(23) . . . . $a \times b : c \times d = A \cdot b : C \cdot d$[2].»

Denn wenn ich c, d, C als ein System betrachte und dieses System so, dass

1) *Erklärung* 5.
2) *Satz* 5.

es sich kongruent bleibt, beliebig verlege, so bleiben die Produkte $c \times d$ und $C \,.\, d$ bei dieser Verlegung sich gleich, also verändern sich ihre Werthe auch nicht, wenn dabei c in dieselbe Richtung, die a hat, verlegt wird. Daraus folgt, dass die Gleichung (23) allgemein richtig sein wird, wenn ich sie nur für den Fall erwiesen habe, dass a und c gleichgerichtet sind. Ist unter dieser Voraussetzung $\frac{c}{a} = \gamma$, so wird dann auch (nach Erklärung 5) $\frac{C}{A} = \gamma$ sein. Substituire ich daher in diesem Falle γa statt c und γA statt C in die Gleichung (23), so bleibt mir zu beweisen, dass

$$a \times b : \gamma a \times d = A \,.\, b : \gamma A \,.\, d$$

sei. Dies wird erwiesen sein, wenn ich gezeigt habe, dass

$$(24) \quad \ldots \quad a \times b : a \times d = A \,.\, b : A \,.\, d$$

sei, oder dass, wenn $a \times b = \alpha\ (a \times d)$ ist, wo wieder α eine Zahlgrösse ist, auch $A.\ b = \alpha\ (A.d)$ sei. Ist aber $a \times b = \alpha\ (a \times d)$, so ist es auch gleich $a \times (\alpha d)$, also $a \times (b - \alpha d) = 0$, also $b - \alpha d$ entweder null oder senkrecht auf a (nach Satz 3), d. h. da A ein gegen a senkrechter Flächenraum ist, entweder $b - \alpha d$ null oder parallel mit A. Nun giebt aber das äussere Produkt eines Flächenraums in eine mit ihm parallele Strecke null (Ausdehnungslehre §. 55 und 56); also ist $A.\ (b - \alpha d)$ null, also $A.\ b$ gleich $A.\ \alpha d$, gleich $\alpha\,(A.d)$, also ist Gleichung (24) erwiesen, also auch (23) zunächst für den Fall, dass a und c gleichgerichtet sind, und demnächst allgemein. Wir können den obigen Satz noch allgemeiner fassen, indem wir sagen:

«*In einer Gleichung, deren Glieder innere Produkte je zweier Strecken oder Vielfache solcher Produkte sind, kann man, ohne dass die Gleichung aufhört eine richtige zu sein, statt dieser inneren Produkte die ihnen proportionalen äusseren setzen, die man dadurch erhält, dass man statt je eines Faktors jener inneren Produkte die senkrecht proportionalen Flächenräume und statt des Zeichens der inneren Multiplikation das der äusseren setzt, und umgekehrt kann man aus der letzteren Gleichung die erstere ableiten* [1].»

Denn da die inneren Produkte proportional sind einer Reihe von Zahlgrössen und die jenen proportionalen äusseren Produkte derselben Reihe proportional sind, so ergiebt sich der zu erweisende Satz sogleich durch Anwendung der Erklärung 2. Hierin liegt nun, da man die Idee des senkrecht proportionalen auch auf andere äussere Produkte übertragen kann, der vorher angedeutete Keim weiterer Entwickelung. Ich will nun diese Entwickelung hier darlegen, dann aber, ehe ich die andere oben angedeutete Entwickelungsreihe verfolge, durch Anwendungen auf Geometrie und Mechanik zeigen, in wiefern die bisher entwickelte Analyse die einer solchen von Leibniz beigelegten Vorzüge besitzt. — Es ist klar, dass man durch die Idee des senkrecht proportionalen, sowohl zu dem äusseren Produkte zweier Strecken als auch zu dem eines Flächenraums in eine Strecke, indem man statt der Strecke einen ihr proportional bleibenden Flächenraum setzt, auf eine neue Weise ein entsprechendes inneres Produkt finden kann. Zur Ableitung der Gesetze dieser

1) *Satz* 5, b.

neuen Verknüpfungen, wie auch zur Begründung der Gesetze des vorher behandelten inneren Produktes, wenn man den Satz 5 in eine Definition dieses inneren Produktes umwandelt, genügt folgender Satz:

« *Wenn a, b, c .... Strecken und A, B, C ... ihnen senkrecht proportionale Flächenräume sind, so stehen auch ihre Summen in derselben Proportionsreihe, d. h. wenn* $s = a + b + c + \ldots$ *und* $S = A + B + C \ldots$ *ist, so sind noch s, a, b, c ... senkrecht proportional mit S, A, B, C ...,* [1]).»

Es ist sogleich klar, dass, wenn dies für die Summe zweier Stücke bewiesen ist, es auch durch Fortsetzung desselben Schlusses für beliebig viele gilt; wir beweisen es daher zunächst nur für 2 Stücke, setzen also $s = a + b$, $S = A + B$ und beweisen, dass s, a, b senkrecht proportional seien mit S, A, B. Es stehe f auf a und b zugleich senkrecht, so steht f auch auf s senkrecht, weil s mit a und b in derselben Ebene liegt. Der Anschaulichkeit wegen denke man sich a, b, s und f von demselben Punkte ausgehend. Drehe ich nun das System der drei Strecken a, b, s, ohne ihre Länge und gegenseitige Lage zu verändern, um die senkrechte Axe f, so weit bis das System (also auch jede Strecke in ihm) einen rechten Winkel beschrieben hat, und gehen dadurch a, b, s in a', b', s' über, so bleibt offenbar noch $s' = a' + b'$. Nun ist aber klar, dass $f.a', f.b', f.s'$ senkrecht proportional mit a, b und s sind; ist also $A = \gamma f a'$, so wird $B = \gamma f b'$, also $A + B$ oder $S = \gamma (fa' + fb') = \gamma f s'$ sein, also sind S, A, B senkrecht proportional s, a, b, und so auch allgemein für beliebig viele Glieder.

Da übrigens durch 3 Glieder einer solchen senkrechten Proportion das 4te bestimmt ist, so folgt auch umgekehrt:

« *Wenn s, a, b, c ... senkrecht proportional S, A, B, C ... sind, und*

$$s = a + b + c + \ldots$$

ist, so ist auch

$$S = A + B + C + \ldots$$

und umgekehrt, wenn unter obiger Voraussetzung die zweite Gleichung gilt, so gilt auch die erste [2]).»

Doch werden wir für die folgende Entwickelung nur den ersteren Satz gebrauchen und auch diesen nur für 2 Glieder.

Durch die Idee des senkrecht proportionalen ergeben sich nun folgende Begriffe:

« *Unter inneren Produkten je zweier Flächenräume verstehe ich solche Grössen, die den äussern Produkten proportional sind, welche man erhält, wenn man in allen jenen inneren Produkten statt der ersten Faktoren senkrecht proportionale Strecken setzt, während man die zweiten Faktoren unverändert lässt, das Zeichen aber der innern Multiplikation* ($\times$) *in das der äusseren* ($.$) *verwandelt* [3]),» und

« *Unter inneren Produkten von je einem Flächenraum in eine Strecke verstehen wir solche Grössen, welche den äusseren Produkten senkrecht proportional*

1) *Satz* 6.
2) *Satz* 7.
3) *Erklärung* 6.

sind, die hervorgehen, wenn man statt der Flächenräume, welche als Faktoren jener inneren Produkte vorkommen, die ihnen senkrecht proportionalen Strecken setzt und, ohne den jedesmaligen andern Faktor zu ändern, das Zeichen der inneren Multiplikation in das der äusseren verwandelt [1]).»

So z. B. werden die Produkte $A \times b$ und $C \times d$, in denen A und C Flächenräume, b und d Strecken sind, den Flächenräumen $a \cdot b$ und $c \cdot d$ senkrecht proportional gesetzt, wenn a und c den Flächenräumen A und C senkrecht proportional sind.

Die Gesetze, welchen diese Verknüpfungen unterliegen, lassen sich sehr leicht vermittelst des Satzes 6 ableiten. So findet man $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$, indem $a \cdot (B + C) = a \cdot B + a \cdot C$ ist, und wenn a senkrecht gegen A ist, die Grössen in der zu erweisenden Gleichung denen der letzteren proportional sind, also derselben Gleichung unterliegen (nach Satz 1, b); und ebenso findet man $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$, indem, wenn b und c senkrecht proportional sind mit B und C, also auch (nach Satz 6) b, c und $(b + c)$ mit B, C und $(B + C)$,

$$(b + c) \cdot A = b \cdot A + c \cdot A$$

ist, also auch dieselbe Gleichung zwischen den mit den Gliedern dieser Gleichung proportionalen Grössen statt finden muss, also

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A.$$

Auf ähnliche Weise folgt, dass $A \times (b + c) = A \times b + A \times c$ ist. Denn es ist

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

also gilt auch nach Satz 7 dieselbe Gleichung für die mit den Gliedern derselben senkrecht proportionalen Grössen, d. h.

$$A \times (b + c) = A \times b + A \times c$$

Und endlich folgt auch, dass

$$(A + B) \times c = A \times c + B \times c$$

ist. Denn es seien a und b die den Flächenräumen A und B senkrecht proportionalen Strecken, so sind (Satz 6) a, b, $(a + b)$ senkrecht proportional mit A, B, $(A + B)$. Nun ist

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Somit gilt nun (Satz 7) dieselbe Gleichung auch für die mit den Gliedern derselben senkrecht proportionalen Grössen. Nach der Erklärung 7 sind aber $(A + B) \times c$, $A \times c$, $B \times c$ senkrecht proportional mit $(a + b) \cdot c$, $a \cdot c$, $b \cdot c$, weil $A + B$, A, B senkrecht proportional mit $a + b$, a, b sind. Also ist (nach Satz 7)

$$(A + B) \times c = A \times c + B \times c.$$

Um die Idee der Multiplikation für diesen letzteren Fall der inneren Multiplikation eines Flächenraums A in eine Strecke b noch anschaulicher darzu-

1) *Erklärung* 7.

legen, will ich annehmen, es sei b_1 die senkrechte Projektion der Strecke b auf den Flächenraum A, und b also gleich $b_1 + b_2$, wo b_2 senkrecht gegen den Flächenraum A ist. Ist dann a eine gegen A senkrechte Strecke, so ist

$$a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1,$$

weil a . b_2 als äusseres Produkt zweier gleichartiger Strecken null ist. Somit ist also auch

$$A \times (b_1 + b_2) = A \times b_1 \text{ oder } A \times b = A \times b_1$$

und $A \times b_1$ ist senkrecht proportional zu setzen dem Produkte $a \cdot b_1$. Es ist aber klar, dass die gegen $a \cdot b_1$ senkrechte Strecke in der Ebene A senkrecht gegen die Projektion b_1, also auch gegen b selbst liegt; daraus folgt also, dass das Produkt $A \cdot b$ durch eine Strecke dargestellt wird, welche in A senkrecht gegen b liegt, und deren relative Grösse eben dadurch bestimmt wird, dass sie dem Flächenraume $a \cdot b$ senkrecht proportional sein soll.

Aus den oben für diese beiden neuen Arten der Multiplikation nachgewiesenen Beziehungen zur Addition ergiebt sich der allgemeine Satz:

«*Für jede Art der inneren Multiplikation zweier Ausdehnungen im Raume gelten alle algebraischen Sätze, welche die allgemeine Beziehung der Multiplikation zur Addition und Subtraktion ausdrücken* [1]).»

Dieser Satz schliesst den früheren Satz 4 als besonderen Fall in sich. Auch ergiebt sich sogleich, «*dass für alle Gattungen innerer Multiplikation zweier Ausdehnungen im Raume das Produkt dann, aber auch nur dann null wird, wenn die Faktoren auf einander senkrecht stehen* [2]),» weil dann und nur dann das entsprechende äussere Produkt parallele Faktoren enthält, also null wird; und dieser Satz erscheint wieder als eine Verallgemeinerung des dritten Satzes. Auch folgt daraus wieder sogleich, «*dass jedes innere Produkt nicht paralleler Faktoren gleich ist dem inneren Produkte des einen Faktors in die senkrechte Projektion des andern Faktors auf den ersteren* [3]),» wobei natürlich, wenn das Produkt eines Flächenraums in eine Strecke betrachtet wird, nur von der Projektion der letzteren auf die Ebene des ersteren die Rede sein kann. Ferner lässt sich leicht zeigen, dass $A \times B = B \times A$ ist; denn ist die senkrechte Projektion von B auf A gleich αA, wo α eine Zahl ist, so ist $A \times B = A \times \alpha A = \alpha (A \times A)$, und $B \times A = (\alpha A) \times A = \alpha (A \times A)$, also $A \times B = B \times A$. Das Produkt $a \times B$ ist bisher noch nicht definirt, wir können es der Analogie gemäss gleich $B \times a$ setzen und haben dann den Satz:

«*Die beiden Faktoren eines jeden inneren Produktes lassen sich ohne Werthänderung des Produktes mit einander vertauschen* [4]),»

und es ist klar, wie dieser Satz nur eine Verallgemeinerung des zweiten Satzes ist. So hat sich nun ergeben, dass alle Gesetze für die innere Multiplikation unter sich übereinstimmen. Insbesondere sind die innere Multiplikation der Strecken und die der Flächenräume, also die von Grössen gleicher Stufe so

---

1) *Satz* 8.
2) *Satz* 9.
3) *Satz* 10.
4) *Satz* 11.

vollkommen parallel, dass es keinen noch so abgeleiteten Satz für die eine dieser Verknüpfungen giebt, der nicht für die andere auch gälte, wenn man nur die Begriffe Strecke und Flächenraum vertauscht. Auch lassen sich in der That beide Arten der Produkte dadurch auseinander ableiten, dass man statt beider Faktoren senkrecht proportionale Grössen setzt. Ich schreite nun zu den Anwendungen und zwar zuerst zu denen auf die Geometrie, werde jedoch nur die innere Multiplikation der Strecken und der Flächenräume ins Auge fassen. Da $a + b$ die dritte Seite eines Dreiecks darstellt, dessen beide andere Seiten a und b sind, wenn man den Anfangspunkt von b auf den Endpunkt von a legt, so folgt aus der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2$ der folgende Satz, zu dem ich sogleich den entsprechenden für Flächenräume setze:

Das Quadrat einer Seite eines Dreiecks ist so gross als die Summe aus den Quadraten der beiden anderen und ihrem doppelten inneren Produkte, wenn diese beiden Seiten fortschreitend genommen sind.

Insbesondere ist, da das innere Produkt senkrechter Strecken null ist, das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Sind a, b, c alle 3 gegeneinander senkrecht, so ist

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

d. h. das Quadrat einer Strecke ist gleich der Summe aus den Quadraten ihrer senkrechten Projektionen auf 3 gegeneinander senkrechte Linien.

Ferner ist allgemein

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a \times b + 2b \times c + 2c \times a,$$

d. h. wenn man eine Strecke auf 3 beliebige Axen parallel den durch die Axen gelegten Ebenen projicirt[1]*), so ist das Quadrat der Strecke die Summe aus den Quadraten der Projektionen und aus den doppelten inneren Produkten je zweier Projektionen.*

Das Quadrat einer Seitenfläche eines dreiseitigen Prismas ist gleich der Summe aus den Quadraten der beiden anderen Seitenflächen und ihrem doppelten inneren Produkte, wenn diese Seitenflächen fortschreitend genommen sind.

Insbesondere ist, da das innere Produkt senkrechter Flächenräume null ist, das Quadrat der Hypotenusenfläche eines rechtwinkligen dreiseitigen Prismas die Summe aus den Quadraten der beiden Kathetenflächen.

Sind A, B, C alle 3 gegeneinander senkrecht, so ist

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

d. h. das Quadrat eines Flächenraums ist die Summe aus den Quadraten seiner senkrechten Projektionen auf 3 gegeneinander senkrechte Ebenen.

Ferner ist allgemein

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2A \times B + 2B \times C + 2C \times A,$$

d. h. wenn man einen Flächenraum auf 3 beliebige Ebenen parallel den Durchschnittskanten der Ebenen projicirt[1]*), so ist das Quadrat des Flächenraums die Summe aus den Quadraten der Projektionen und aus den doppelten inneren Produkten je zweier Projektionen.*

1) d. h. auf jede Axe parallel der Ebene der beiden andern; denn dann ist die Strecke die Summe der 3 Projektionen (Ausdehnungslehre §. 90).

1) d. h. auf jede Ebene parallel der Durchschnittskante der beiden andern; denn dann ist der Flächenraum die Summe seiner 3 Projektionen (Ausdehnungslehre §. 90).

Diese Sätze, welche als Erweiterungen des Pythagoräischen Lehrsatzes aufgefasst werden können, dienen dazu, um die Länge einer durch ihre Richtstücke (Koordinaten) gegebenen Strecke oder den Inhalt eines durch seine Richtstücke gegebenen Flächenraums auszudrücken.

Die Formel

«$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$»

liefert, wenn a, b, c in derselben Ebene liegen, den Satz:

« *Wenn man durch eine Ecke eines Parallelogramms eine Kreislinie legt, und von derselben Ecke die Diagonale* $(a + b)$ *zieht, so ist das Produkt der Diagonale in die in ihr liegende Sehne die Summe aus den Produkten der beiden an jene Ecke stossenden Seiten* a *und* b *in die in ihnen liegenden Sehnen,*»

weil nämlich diese Sehnen die senkrechten Projektionen des Durchmessers auf die 3 Linien sind.

Die Formel

«$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$»

liefert, wenn A, B, C durch dieselbe Kante gehen, den Satz:

« *Wenn man durch eine Kante eines Parallelepipedums eine Cylinderfläche legt, und durch dieselbe Kante die Diagonalfläche* $(A + B)$ *legt, so ist das Produkt der Diagonalfläche in das von ihr (durch den Cylinder) abgeschnittene Stück die Summe aus den Produkten der beiden durch jene Kante gehenden Seitenflächen* A *und* B *in die von ihnen durch den Cylinder abgeschnittenen Stücke,*»

weil diese Stücke den senkrechten Projektionen der Durchmesser-Ebene proportional sind.

Da die parallelen Sätze für Flächenräume sich immer leicht ableiten lassen aus denen für Strecken, und jene weniger Interesse darbieten als diese, so will ich von nun an nur diese letzteren aufstellen.

Die Formel

«$(a + b + c + \ldots) \times p = a \times p + b \times p + c \times p + \ldots$»

liefert, wenn man a, b, $c \ldots$ und p mit ihren Anfangspunkten aneinandergelegt denkt, p senkrecht auf sie projicirt, und bedenkt, dass die Summe $a + b + c + \ldots$, wenn A, B, $C \ldots$ die Endpunkte der Strecken und R ihr gemeinschaftlicher Anfangspunkt ist, gleich $A - R + B - R + \ldots = n(S - R)$ ist, wo S den Schwerpunkt der Endpunkte vorstellt und n die Anzahl der Strecken $a, b, c \ldots$ ist, den Satz:

« *Wenn man von irgend einem Punkte* (R) *nach n Punkten* $(A, B, C \ldots)$ *und nach ihrem Schwerpunkte* (S) *gerade Linien zieht, und durch jenen ersten Punkt* (R) *eine beliebige Kugelfläche legt (welche die Linien* RS, RA, $RB \ldots$ *in den Punkten* S', A', $B' \ldots$ *zum zweitenmale trifft): so ist das Produkt der nach dem Schwerpunkte* (S) *gezogenen geraden Linie* (RS) *in die in ihr liegende Sehne* (RS') *das arithmetische Mittel zwischen den Produkten der nach den n Punkten gezogenen Linien* $(RA, RB \ldots)$ *in die in ihnen liegenden Sehnen* $(RA', RB' \ldots)$.»

Hat man eine Gleichung zwischen inneren Produkten je zweier Strecken, so kann man diese Gleichung sehr leicht durch Annahme senkrechter Koordinaten in Zahlgleichungen verwandeln. Denn ist $p_1 \times p_2$ ein solches inneres

Produkt, und sind a_1, b_1, c_1 die Richtstücke (Koordinaten mit festgehaltener Richtung der Axen, in denen sie liegen) von p_1 und a_2, b_2, c_2 die von p_2 in Bezug auf dasselbe Axensystem, so ist

$$p_1 = a_1 + b_1 + c_1, \quad p_2 = a_2 + b_2 + c_2,$$

also

$$p_1 \times p_2 = (a_1 + b_1 + c_1) \times (a_2 + b_2 + c_2) = a_1 \times a_2 + b_1 \times b_2 + c_1 \times c_2,$$

da alle übrigen Produkte als innere Produkte senkrechter Strecken nach Satz 9 null sind. Misst man nun alle Richtstücke derselben Axe durch dasselbe Mass, und nimmt die 3 Masse für die 3 Axen gleich lang an, etwa gleich lang der Strecke e, und bezeichnet man die Quotienten dieser Messungen mit den entsprechenden griechischen Buchstaben, so erhält man

$$\frac{p_1 \times p_2}{e^2} = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2,$$

und erhält also dann durch Division der ganzen Gleichung mit dem Quadrate des Masses e eine blosse Zahlengleichung.

Ich schreite nun zu den Anwendungen auf die Mechanik. Zuerst will ich einen in der Bewegung begriffenen Punkt betrachten, ohne mich um die Ursachen seiner Bewegung zu kümmern. Ich nehme mit Möbius (Mechanik des Himmels §. 9) und Grassmann (Ausdehnungslehre §. 105) in den Begriff der Geschwindigkeit zugleich den der Richtung auf, so dass ich zwei Geschwindigkeiten nur dann gleich setze, wenn sie nicht bloss gleichen absoluten Werth, sondern auch gleiche Richtung haben, d h. ich setze die Geschwindigkeit eines in Bewegung begriffenen Punktes derjenigen Strecke gleich, welche er beschreiben würde, wenn er in dem als Einheit angenommenen Zeitraume dieselbe Bewegung, die er hat, unverändert beibehielte. Nämlich wenn ein Punkt in derselben Richtung so fortschreitet, dass er in gleichen Zeiträumen stets gleiche und gleichgerichtete Wege zurücklegt, die Wege sich also wie die Zeiträume verhalten, in denen er sie zurücklegt, so sage ich, der Punkt behalte seine Bewegung unverändert bei. Gesetzt also, er habe in irgend einem Zeitpunkte T eine solche Bewegung, dass, wenn er dieselbe Bewegung während des als Einheit genommenen Zeitraums unverändert beibehielte, er von dem Orte p, den er zur Zeit T wirklich hat, zu dem Orte p_1 gelangen würde, so ist seine Geschwindigkeit $p_1 - p$. Ich könnte nun dies Verfahren, durch welches diese Geschwindigkeit aus der als bekannt vorausgesetzten Bewegung eines Punktes abgeleitet werden kann, rein geometrisch entwickeln, müsste jedoch dann bis in die Principien der Differenzialrechnung zurückgehen, um diese auf die hier dargestellte Analyse zu übertragen. Da dies jedoch dem vorliegenden Zwecke nicht entsprechen würde, so will ich auf den gewöhnlichen Begriff des Differenzials zurückgehen und zu dem Ende den sich bewegenden Punkt p senkrecht auf eine Axe projiciren. Die Projektion sei p'. Dann ist klar, dass, wenn die Wege, die der projicirte Punkt in gleichen Zeiträumen zurücklegt, gleich und gleichgerichtet sind, auch die Projektionen dieser Wege gleich sein werden, also die Projektion p' gleichförmig fortschreitet, wenn p gleichförmig und geradlinig fortschreitet, und dass, wenn der projicirte Punkt von dem Orte p nach p_1 gelangt, auch die Projektion gleichzeitig von dem Orte p' nach der

Projektion p'_1 des Ortes p_1 gelangt. Ist also $p_1 - p$ die Geschwindigkeit des projicirten Punktes, so ist $p'_1 - p'$ die der Projektion, d. h. «*die Geschwindigkeit, mit welcher die senkrechte Projektion eines Punktes auf eine gerade Linie fortschreitet, ist stets gleich der auf diese Linie senkrecht projicirten Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt selbst fortschreitet.*» Projiciren wir nun eine Strecke senkrecht auf 3 gegeneinander senkrechte Axen, so ist die projicirte Strecke die Summe ihrer 3 Projektionen. Also «*wenn wir einen sich bewegenden Punkt senkrecht auf 3 gegeneinander senkrechte Axen projiciren, so ist die Geschwindigkeit jenes Punktes die Summe aus den Geschwindigkeiten seiner Projektionen.*» Wir wollen nun die Strecke vom Durchschnittspunkte der 3 Axen bis zur Projektion des Punktes p auf die eine der 3 Axen mit xa bezeichnen, wo x eine Zahlgrösse und a ein Stück der Axe (dies Stück als Strecke betrachtet) ist. Nun ist bekannt, dass die Geschwindigkeit dieser Projektion, wenn x als Funktion der Zeit t gegeben ist, gleich ist $a\frac{dx}{dt}$. Nennen wir nun die Strecken von dem Durchschnittspunkte g der 3 Axen bis zu den Projektionen des Punktes p auf die zwei andern Axen yb und zc (wobei a, b, c gleich lang angenommen werden können), so sind $b\frac{dy}{dt}$ und $c\frac{dz}{dt}$ die Geschwindigkeiten der beiden anderen Projektionen, also die Geschwindigkeit des Punktes p gleich

$$a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt},$$

während

$$p - g = ax + by + cz$$

gleich der Summe seiner Projektionen, oder

$$p = g + ax + by + cz$$

ist. Wir bezeichnen den obigen Differenzialausdruck $a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}$, da man zu ihm auch gelangt, wenn man in der Funktion $p = g + ax + by + cz$ die Grössen g, a, b, c wie konstante behandelt und dann nach der Zeit differenziirt, mit $\frac{dp}{dt}$. Das heisst:

«*Wenn $p = g + ax + by + cz$ ist und g ein Punkt, a, b, c aber 3 gegeneinander senkrechte Strecken sind, so ist* $\frac{dp}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}$,» und da x, y, z Funktionen der Zeit, also auch p eine Funktion der Zeit, aber eine geometrische ist, so folgt der Satz:

«*Wenn ein sich bewegender Punkt p als geometrische Funktion der Zeit t gegeben ist, so ist der Differenzialquotient $\frac{dp}{dt}$ dieser Funktion nach der Zeit die Geschwindigkeit des Punktes ihrer Grösse und Richtung nach.*»

Wir haben bisher den Begriff des geometrischen Differenzials an 3 gegen-

einander senkrechte Axen geknüpft. Hiervon können wir den Begriff leicht lösen. Es sei allgemein

$$p = g + a_1 T_1 + a_2 T_2 + \ldots,$$

wo p und g Punkte, g ein fester Punkt, $a_1, a_2, \ldots$ konstante Strecken, $T_1, T_2, \ldots$ beliebige Funktionen der Zeit sind, so lässt sich leicht zeigen, dass

$$\frac{dp}{dt} = a_1 \frac{dT_1}{dt} + a_2 \frac{dT_2}{dt} + \ldots.$$

ist. Denn es seien $a_1, a_2, \ldots$ auf die 3 gegeneinander senkrechten Axen a, b, c senkrecht projicirt und $a_1 = \mathfrak{a}_1 a + \mathfrak{b}_1 b + \mathfrak{c}_1 c$ u. s. w., wo $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ u. s. w. Zahlgrössen sind, so ist

$$p = g + (\mathfrak{a}_1 T_1 + \mathfrak{a}_2 T_2 + \ldots.)\, a + (\mathfrak{b}_1 T_1 + \mathfrak{b}_2 T_2 + \ldots.)\, b + (\mathfrak{c}_1 T_1 + \mathfrak{c}_2 T_2 + \ldots)\, c,$$

also auch nach der Definition

$$\frac{dp}{dt} = a\left[\mathfrak{a}_1 \frac{dT_1}{dt} + \mathfrak{a}_2 \frac{dT_2}{dt} + \ldots.\right] + b\left[\mathfrak{b}_1 \frac{dT_1}{dt} + \mathfrak{b}_2 \frac{dT_2}{dt} + \ldots.\right] + c\left[\mathfrak{c}_1 \frac{dT_1}{dt} + \mathfrak{c}_2 \frac{dT_2}{dt} + \ldots.\right]$$

$$= (\mathfrak{a}_1 a + \mathfrak{b}_1 b + \mathfrak{c}_1 c)\frac{dT_1}{dt} + (\mathfrak{a}_2 a + \mathfrak{b}_2 b + \mathfrak{c}_2 c)\frac{dT_2}{dt} + \ldots.$$

$$= a_1 \frac{dT_1}{dt} + a_2 \frac{dT_2}{dt} + \ldots.$$

Es ist jene Form, in welcher p als Funktion der Zeit dargestellt war, die allgemeinste Form, in welcher ein Punkt als geometrische Funktion der Zeit dargestellt werden kann, und wir gelangen also von dieser allgemeinen Form aus sogleich zu dem Differenzialquotienten jener Funktion nach der Zeit, d. h. der Geschwindigkeit des als Funktion der Zeit gesetzten Punktes p, wenn wir bei der Differenziation die räumlichen Grössen wie algebraische behandeln; und zu diesem Begriffe würden wir sogleich gelangt sein, wenn wir bei der Entwickelung des Begriffs des Differenzials rein geometrisch fortgeschritten wären. Wird nun die Geschwindigkeit $\frac{dp}{dt}$ mit v bezeichnet, so ist v wieder eine geometrische Funktion, wir nennen dann $\frac{dv}{dt}$ (die Geschwindigkeit, mit der die Geschwindigkeit des Punktes wächst) die Beschleunigung des Punktes p, welche demnach wieder nicht bloss ihrer absoluten Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach aufgefasst ist. Sie wird, je nachdem ihre Richtung mit der der Geschwindigkeit einen stumpfen, rechten oder spitzen Winkel macht, den absoluten Werth der Geschwindigkeit vermehren, unverändert lassen oder vermindern. Wir nennen analog der Benennungsweise in der Differenzialrechnung den Ausdruck $\frac{dv}{dt}$ d. h. $\frac{d\left(\frac{dp}{dt}\right)}{dt}$, den wir mit $\frac{d^2p}{dt^2}$ bezeichnen, den zweiten Diffe-

renzialquotienten der räumlichen Funktion p nach der Zeit t, und dieser ist also der Beschleunigung gleich gesetzt.

Dies sind die wesentlichen Grundzüge der reinen Bewegungslehre. In der Mechanik betrachten wir die Bewegungen als durch Ursachen bewirkt. Wir nennen die Ursache der Beschleunigung eines Punktes die beschleunigende Kraft, welche auf ihn einwirkt, und setzen sie, wenn keine andere beschleunigende Kraft gleichzeitig einwirkt, der Beschleunigung gleich. Wir sagen ferner, dass zwei beschleunigende Kräfte gleichzeitig auf einen Punkt einwirken, wenn die Beschleunigung des Punktes die Summe ist aus den beschleunigenden Kräften, wobei immer festzuhalten ist, dass die beschleunigenden Kräfte als *Strecken* definirt sind und also auch in diesem Sinne ihre Summe aufzufassen ist. Wirken also beliebig viele beschleunigende Kräfte P_1, P_2 . . . . auf einen Punkt p ein, so hat man die Gleichung

$$(26) \quad \ldots \quad \frac{d^2p}{dt^2} = P_1 + P_2 + \ldots .$$

als Grundgleichung der Mechanik. Die beschleunigenden Kräfte können wir wieder, entweder alle oder einige derselben, als Wirkungen allgemeinerer Kräfte, die sich auf ganze Systeme von Punkten beziehen, auffassen. Von dieser Art sind alle Kräfte der Natur. So z. B. hat die Gravitation das Bestreben, die gegenseitige Entfernung zweier Punkte zu vermindern, die Kohäsion, die gegenseitige Entfernung je zweier Punkte des Systems unverändert zu erhalten, die Elasticität, den Raumesinhalt zwischen 4 aneinander liegenden Punkten wiederherzustellen u. s. w. Es kommt darauf an, den Begriff eines solchen Bestrebens schärfer aufzufassen. Die Entfernung zweier Punkte, der Raumesinhalt zwischen 4 Punkten, und überhaupt alles, worauf sich das Streben einer Kraft, die einem System von Punkten einwohnt, bezieht, lässt sich als Funktion dieser Punkte auffassen, wir setzen daher folgende Definition solcher Kräfte fest:

«*Wir sagen, dass eine Kraft, die sich auf ein System gleich schwerer (gleich beweglicher) Punkte p, g, r . . . bezieht, das Streben habe, eine algebraische Funktion*[1]) *F (p, q, r . . . .) dieser Punkte zu vergrössern, wenn die durch sie bewirkte beschleunigende Kraft eines jeden Punktes in derjenigen Richtung wirkt, in welcher bei gleich grossen, aber unendlich kleinen Bewegungen des Punktes jene Funktion am meisten wächst, und wenn die beschleunigenden Kräfte, welchen je 2 Punkte des Systems vermöge jener Kraft unterliegen, ihrer absoluten Grösse nach in dem Verhältnisse stehen, in welchem beide Punkte einzeln genommen, bei gleich grossen, aber unendlich kleinen Bewegungen nach jenen Richtungen, die Funktion zu vergrössern vermögen.*» Ein Beispiel wird dies erläutern.

Es sei das Bestreben einer Kraft V, zwei gleich schwere Punkte p und q von einander zu entfernen. Dann können wir $(p - q)^2$ als die algebraische Funktion der Punkte p und q betrachten, welche zu vergrössern das Streben jener Kraft ist. Um nun zuerst die Richtung der beschleunigenden Kraft, welche V auf den Punkt p übt, zu finden, haben wir zu fragen, welche Richtung er

1) Eine algebraische Funktion soll aber eine solche heissen, welche einer veränderlichen Zahlgrösse proportional ist.

annehmen müsste, damit bei gleich grossen, aber unendlich kleinen Wegen der Werth von $(p-q)^2$ am meisten vermehrt wird. Dies ist offenbar die Richtung der Verlängerung von qp über p hinaus. Ebenso wird die beschleunigende Kraft, welcher q unterliegt, in der Verlängerung von pq über p hinaus wirken. Fragen wir nun nach dem absoluten Verhältnisse dieser beiden beschleunigenden Kräfte, so ist dies gleich dem Verhältnisse, in welchem bei gleich grossen, aber unendlich kleinen Wegen in den Richtungen der Verlängerungen, während jedesmal der andere Punkt ruhend gedacht wird, $(p-q)^2$ wächst. Dies Verhältniss ist offenbar das der Gleichheit; also sind auch die beschleunigenden Kräfte absolut genommen gleich. Nun können wir ein sehr leichtes Verfahren finden, nach welchem man jedesmal, welche algebraische Funktion es auch sei, auf die sich das Bestreben der Kraft V bezieht, die Richtungen und das Verhältniss der dadurch gewirkten beschleunigenden Kräfte finden kann. Ich will die Ableitung dieses Verfahrens, da ich nicht eine selbstständige Begründung der geometrischen Differenzialrechnung geben will, wieder zunächst an senkrechte Koordinaten knüpfen, obgleich das Verfahren an sich gänzlich unabhängig davon ist. Es sei die algebraische Funktion $F(p_1, p_2 \ldots.)$ der Punkte $p_1, p_2, \ldots.$ gegeben. Um dieselbe in eine algebraische Funktion von Zahlgrössen zu verwandeln, nehmen wir durch einen Punkt g 3 gegeneinander senkrechte Axen und in ihnen 3 gleich lange Masse a, b, c an, durch welche wir die senkrechten Projektionen der Strecken p_1-g, $p_2-g, \ldots.$ messen, und setzen demnach

$$p_1-g=x_1a+y_1b+z_1c;\quad p_2-g=x_2a+y_2b+z_2c \text{ u. s. w.}$$

Nun können wir diejenige Funktion als eine algebraische der Punkte $p_1, p_2, \ldots.$ ansehen, welche einer Funktion der sämmtlichen Koordinaten, jede durch das zugehörige Mass gemessen, proportional, d. h. gleich einer solchen mit einem konstanten Faktor multiplicirten Funktion ist. Da aus jener Funktion $F(p_1, p_2, \ldots)$ nur die Verhältnisse der beschleunigenden Kräfte und ihre Richtungen abgeleitet werden, und weder diese noch jene, wie sogleich aus der Definition einleuchtet, sich ändern, wenn man die Funktion mit einer beliebigen positiven Grösse multiplicirt, so können wir die algebraische Funktion der Punkte gleich einer mit dem Quadrate des Masses multiplicirten Zahlfunktion der Zahlgrössen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,$. setzen. Wir setzen daher

$$F(p_1, p_2 \ldots.) = a^2 f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots.).$$

Um nun die Richtungen und das Verhältniss der beschleunigenden Kräfte zu finden, haben wir die Funktionsvergrösserung zu betrachten, welche hervorgeht, wenn die Punkte p_1 u. s. w. unendlich kleine Wege beschreiben. Der unendlich kleine Weg des Punktes p_1, den wir mit δp_1 bezeichnen, ist, wenn $a\delta x_1$, $b\delta y_1$, $c\delta z_1$ die senkrechten Projektionen desselben auf die 3 Axen sind,

$$\delta p_1 = a\delta x_1 + b\delta y_1 + c\delta z_1.$$

Durch diese Bewegung geht p_1 in $p_1+\delta p_1$ über, also $g+ax_1+by_1+cz_1$ in $g+a(x_1+\delta x_1)+b(y_1+\delta y_1)+c(z_1+\delta z_1)$; d. h. es geht dadurch x_1 in $x_1+\delta x_1$, y_1 in $y_1+\delta y_1$ und z_1 in $z_1+\delta z_1$ über. Ist ebenso δp_2 die Bewegung des Punktes p_2, und

$$\delta p_2 = a\delta x_2 + b\delta y_2 + c\delta z_2$$

u. s. w., so geht durch diese Bewegung x_2 in $x_2 + \delta x_2$, y_2 in $y_2 + \delta y_2$, z_2 in $z_2 + \delta z_2$ über u. s. w. Die daraus fliessende Vergrösserung von f finden wir also durch Differenziation dieser Funktion, indem wir δx_1 u. s. w. als Differenziale der entsprechenden Veränderlichen setzen. Bezeichnen wir das daraus hervorgehende Differenzial der Funktion gleichfalls durch δ, so erhalten wir

$$(27) \quad \ldots. \quad \delta f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots.) = u_1\delta x_1 + v_1\delta y_1 + w_1 dz_1 + u_2\delta x_2 + v_2\delta y_2 + w_2\delta z_2 \text{ u. s. w.},$$

wo u_1, v_1, w_1, ... die partiellen Differenzialquotienten nach den entsprechenden Veränderlichen x_1, y_1, z_1 u. s. w. sind. Um hieraus auf eine einfache Weise die Richtungen und das Verhältniss der beschleunigenden Kräfte zu finden, verwandeln wir die Differenzialgleichung wieder durch Multiplikation mit a^2 in geometrische Form und setzen, so wie $F = a^2 f$ war, nun auch $\delta F = a^2\delta f$; also ist

$$\delta F(p_1, p_2 \ldots.) = a^2[u_1\delta x_1 + v_1\delta y_1 + w_1\delta z_1 + u_2\delta x_2 + v_2\delta y_2 + w_2\delta z_2 + \ldots],$$

oder da $a^2 = b^2 = c^2$ ist,

$$\delta F(p_1, p_2 \ldots.) = u_1 a \times \delta x_1 a + v_1 b \times \delta y_1 b + w_1 c \times \delta z_1 c + u_2 a \times \delta x_2 a + v_2 b \times \delta y_2 b + w_2 c \times \delta z_2 c + \ldots.$$

Also da $a\delta x_1 + b\delta y_1 + c\delta z_1 = \delta p_1$, $a\delta x_2 + b\delta y_2 + c\delta z_2 = \delta p_2$ ist und a, b, c gegeneinander senkrecht sind, so ist

$$\delta F(p_1, p_2 \ldots.) = (au_1 + bv_1 + cw_1) \times \delta p_1 + (au_2 + bv_2 + cw_2) \times \delta p_2 + \ldots.$$

Wenn wir endlich die Grösse $au_1 + bv_1 + cw_1$ mit q_1, $au_2 + bv_2 + cw_2$ mit q_2 u. s. w. bezeichnen, und diese Strecken q_1, q_2 u. s. w. die partiellen Differenzialquotienten nach $p_1, p_2 \ldots.$ nennen, so erhalten wir die einfache Gleichung

$$(28) \quad \ldots. \quad \delta F(p_1, p_2 \ldots.) = q_1 \times \delta p_1 + q_2 \times \delta p_2 + \ldots.$$

und den Satz:

«*Die Aenderung* (δF), *welche eine algebraische Funktion* (F) *von Punkten* (p_1, p_2, ...), *die als Produkt eines Streckenquadrates in eine veränderliche Zahlgrösse erscheint, dadurch erfährt, dass die Punkte, von denen sie abhängt, unendlich kleine Wege* (δp_1, δp_2, ...) *beschreiben, ist der Summe gleich, die man erhält, wenn man die Funktion nach den einzelnen veränderlichen Punkten partiell differenziirt, diese partiellen Differenzialquotienten mit den Wegen der zugehörigen Punkte innerlich multiplicirt und diese inneren Produkte addirt.*» Und «*den partiellen Differenzialquotienten einer solchen Funktion* (F) *nach einem der Punkte* (p_1), *von denen sie abhängt, findet man, wenn man die Funktion durch das Quadrat des Masses dividirt, den Quotienten als Funktion der in Bezug auf* 3 *gegeneinander senkrechte und gleich lange, an einen beliebigen Punkt gelegte Masse genommenen Koordinaten dieser Punkte darstellt, nach den Koordinaten jenes Punktes* p_1 *differenziirt und diese* 3 *Differenzialquotienten addirt, nachdem man jeden mit dem zugehörigen Masse multiplicirt hat.*»

Aus der Gleichung 28 folgen sogleich die Richtungen und Verhältnisse der Kräfte. Betrachtet man die Funktionsänderung bei verschiedenen unendlich

kleinen, aber gleich langen Wegen δp_1 des Punktes p_1, so ist dieselbe gleich $q_1 \times \delta p_1$, d. h. bei konstantem q_1 proportional der senkrechten Projektion von δp_1 auf q_1, also bei gleich langem δp_1 am grössten, wenn δp_1 gleiche Richtung hat mit q_1. Somit drücken q_1, q_2, ... die Richtungen der beschleunigenden Kräfte aus. Die Funktionsänderungen, welche durch zwei verschiedene Punkte p_1 und p_2 bei gleich langen Wegen nach diesen Richtungen q_1 und q_2 bewirkt werden, verhalten sich wie $q_1\delta p_1$ zu $q_2\delta p_2$, also, da δp_1 parallel q_1 und δp_2 parallel q_2, und δp_1 und δp_2 gleich lang sind, wie q_1 zu q_2, d. h.:

«*Die beschleunigenden Kräfte, welchen die Punkte eines Systems vermöge einer Kraft unterliegen, die das Streben hat, eine algebraische Funktion jener Punkte zu vergrössern, verhalten sich in Grösse und Richtung wie die partiellen Differenzialquotienten dieser Funktion nach diesen Punkten.*»

Ehe ich die hieraus fliessende Formel der Mechanik ableite, will ich zeigen, dass die partiellen Differenzialquotienten einer Funktion von Punkten, deren Ableitung bisher an gewisse senkrechte Axen geknüpft war, hiervon unabhängig seien. Es wurden 3 gegeneinander senkrechte Masse a, b, c und ein Punkt g angenommen, auf ihre Richtungen wurden die Strecken $p_1 - g$, $p_2 - g$ u. s. w. senkrecht projicirt, diese Projektionen jede durch das ihr gleichgerichtete Mass gemessen, und die Resultate dieser Messungen mit x_1, y_1, z_1 u. s. w. bezeichnet, so dass

$$p_1 - g = x_1 a + y_1 b + z_1 c \text{ u. s. w.}$$

gesetzt war; dann wurde durch Substitution dieser Werthe für p_1 u. s. w. in die algebraische Funktion F der Punkte und durch Division mit dem Quadrate des Masses eine algebraische Funktion f von x_1, y_1, z_1, ... abgeleitet, diese nach den Veränderlichen x_1, y_1, z_1, ... partiell differenziirt, die Differenzialquotienten mit den ihnen zugehörigen Massen a, b, c multiplicirt und diese Produkte addirt. Lassen wir nun a, b, c übergehen in e, e', e'', wo

$$(29) \quad \ldots \quad \begin{cases} e = \alpha a + \beta b + \gamma c \\ e' = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c \\ e'' = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c \end{cases}$$

ist, so werden, wenn

$$p_1 = v_1 e + v'_1 e' + v''_1 e'' \text{ ist, also}$$

$$v_1 e + v'_1 e' + v''_1 e'' = x_1 a + y_1 b + z_1 c$$

ist, die Werthe für x_1, y_1, z_1 folgende sein:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1\alpha + v'_1\alpha' + v''_1\alpha'' \\ y_1 &= v_1\beta + v'_1\beta' + v''_1\beta'' \\ z_1 &= v_1\gamma + v'_1\gamma' + v''_1\gamma''; \end{aligned}$$

und entsprechende Werthe wird man für die Koordinaten der übrigen Punkte erhalten. Will man nun den Differenzialquotienten einer Funktion F nach p_1 vermittelst dieser neuen Masse finden, so hat man, nachdem man in $f(x_1, y_1 \ldots)$ die so eben gefundenen Ausdrücke substituirt hat, nach v_1, v'_1, v''_1 zu differenziiren, die so erhaltenen Differenzialquotienten mit e, e', e'' beziehlich zu

multipliciren und diese Produkte zu addiren; dann ist zu zeigen, dass diese Summe noch gleich q_1, d. h.

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right) a + \left(\frac{\delta f}{\delta y_1}\right) b + \left(\frac{\delta f}{\delta z_1}\right) c = \left(\frac{\delta f}{\delta v_1}\right) e + \left(\frac{\delta f}{\delta v'_1}\right) e' + \left(\frac{\delta f}{\delta v''_1}\right) e''$$

ist. Nun ist

$$\left(\frac{\delta f}{\delta v_1}\right) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right)\left(\frac{\delta x_1}{\delta v_1}\right) + \left(\frac{\delta f}{\delta y_1}\right)\left(\frac{\delta y_1}{\delta v_1}\right) + \left(\frac{\delta f}{\delta z_1}\right)\left(\frac{\delta z_1}{\delta v_1}\right)$$

$$= \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right) \alpha + \left(\frac{\delta f}{\delta y_1}\right) \beta + \left(\frac{\delta f}{\delta z_1}\right) \gamma$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta v'_1}\right) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right) \alpha' + \left(\frac{\delta f}{\delta y_1}\right) \beta' + \left(\frac{\delta f}{\delta z_1}\right) \gamma'$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta v''_1}\right) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right) \alpha'' + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) \beta'' + \left(\frac{\delta f}{\delta z_1}\right) \gamma''.$$

Also ist

$$\left(\frac{\delta f}{\delta v_1}\right) e + \left(\frac{\delta f}{\delta v'_1}\right) e' + \left(\frac{\delta f}{\delta v''_1}\right) e'' = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right) (\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'')$$

$$+ \left(\frac{\delta f}{\delta y_1}\right) (\beta e + \beta' e' + \beta'' e'') + \left(\frac{\delta f}{\delta z_1}\right) (\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'').$$

Sind nun e, e', e'' gleich lang mit a, b, c und rechtwinklig gegeneinander, so lässt sich leicht zeigen, dass $\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e''$ gleich a ist u. s. w. Denn bezeichnet $cos(rs)$ den Kosinus des Winkels zwischen zwei gleich langen Strecken r und s, so ist $r\ cos(rs)$ die senkrechte Projektion von s auf r ihrer Grösse und Richtung nach. Aus den Gleichungen (29) folgt also dann $\alpha = \cos(ea)$, $\alpha' = \cos(e'a)$, $\alpha'' = \cos(e''a)$. Nun ist

$$a = e\cos(ea) + e'\cos(e'a) + e''\cos(e''a), \text{ d. h.}$$

$$= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e''.$$

Und eben so folgt

$$b = \beta e + \beta' e' + \beta'' e'', \quad c = \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e''.$$

Also erhält man die zu erweisende Gleichung

$$\left(\frac{\delta f}{\delta v_1}\right) e + \left(\frac{\delta f}{\delta v'_1}\right) e' + \left(\frac{\delta f}{\delta v''_1}\right) e'' = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right) a + \left(\frac{\delta f}{\delta y_1}\right) b + \left(\frac{\delta f}{\delta z_1}\right) c.$$

Sind e, e', e'' nicht gleich lang mit a, b, c, sondern ist die Länge der letzteren das m-fache von der der ersteren, so hat man nach dem oben angegebenen Verfahren in Bezug auf die Masse e, e', e'' die Funktion $\frac{F}{e}$, die wir mit f' bezeichnen wollen, zu differenziiren. Dann ist, da $f = \frac{F}{a^2}$ und $a^2 = m^2 e^2$ ist,

$f' = m^2 f$. Dann sind die Projektionen von e, e', e'' auf a, b, c den mit $\frac{1}{m}a$, $\frac{1}{m}b$, $\frac{1}{m}c$ multiplicirten Kosinussen gleich und die von a, b, c auf e, e', e'' den mit me, me', me'' multiplicirten Kosinussen, und es wird $a = m^2(e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'')$ u. s. w. [1]).

Also bleibt noch

$$\left(\frac{\delta f'}{\delta v_1}\right) e + \left(\frac{\delta f'}{\delta v'_1}\right) e' + \left(\frac{\delta f'}{\delta v''_1}\right) e'' = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}\right) a + \left(\frac{\delta f}{\delta y_1}\right) b + \left(\frac{\delta f}{\delta z_1}\right) c,$$

d. h. die angegebene Methode ist von der besonderen Annahme der Koordinaten gänzlich unabhängig, sobald diese nur jedesmal untereinander gleich lang und senkrecht sind.

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen, so ergab sich, «*wenn F die algebraische Funktion zweiter Dimension ist, deren Vergrösserung eine Kraft V, die auf ein System von Punkten* p_1, p_2 .... *wirkt, erstrebt, und* q_1, q_2 .... *die partiellen Differenzialquotienten von F nach den Punkten* p_1, p_2 .... *sind, von denen F abhängt, so sind*

$$\lambda q_1,\ \lambda q_2,\ \lambda q_3\ \ldots\ .$$

die beschleunigenden Kräfte, denen die Punkte p_1, p_2, p_3 .... *vermöge jener Kraft V unterliegen, wo* λ *einen für alle diese Punkte gleichen Zahlfaktor bezeichnet, welcher von der Lage der Punkte* p_1, p_2 .... *in einer durch die Natur jener Kraft V bedingten Weise abhängt.*» Wirken daher auf die Punkte p_1, p_2 .... die beschleunigenden Kräfte P_1, P_2 ...., und ausserdem die durch die Kraft V bedingten beschleunigenden Kräfte λq_1, λq_2 ...., so hat man

$$P_1 + \lambda q_1 - \frac{d^2 p_1}{dt^2} = 0$$

$$P_2 + \lambda q_2 - \frac{d^2 p_2}{dt^2} = 0$$

u. s. w.

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen innerlich mit δp_1, die zweite mit δp_2 u. s. w. und addirt, so erhält man, da $q_1 \times \delta p_1 + q_2 \times \delta p_2 + \ldots$ gleich δF ist, die Gleichung

$$(30)\qquad \left(P_1 - \frac{d^2 p_1}{dt^2}\right) \times \delta p_1 + \left(P_2 - \frac{d^2 p_2}{dt^2}\right) \times \delta p_2 + \ldots + \lambda \delta F = 0,$$

welche für jeden Werth von δp_1, δp_2 .... gilt. Nimmt man endlich noch an, dass die Kraft V, wie dies z. B. bei festen Körpern annäherungsweise angenommen werden kann, bei unendlich kleinen Entfernungen aus derjenigen Lage, für die F einen bestimmten Werth hat, schon so intensiv wirkt, dass die übrigen Kräfte das System nicht merklich aus einer solchen Lage zu entfernen vermögen, so können wir annäherungsweise F konstant setzen; wir nennen

---

1) weil dann $a = m[e\cos(ea) + e'\cos(e'a) + e''\cos(e''a)]$ ist, und $\cos(ea) = m\alpha$, $\cos(e'a) = m\alpha'$, $\cos(e''a) = m\alpha''$ ist.

solche Kräfte, wenn sie schon bei unendlich kleinen Entfernungen aus jener Lage die übrigen Kräfte zu überwinden vermögen, so dass also nur unendlich kleine Abweichungen aus jener Lage, für die F jenen bestimmten Werth hat, eintreten können, behauptende Kräfte. Also:

« *Wenn beliebige Kräfte* P_1, P_2 .... *auf beliebige gleich schwere Punkte* p_1, p_2 .... *eines Systems wirken, und diese Punkte alle oder theilweise behauptenden Kräften unterliegen, welche mit unüberwindlicher Gewalt gewisse Funktionen* L, M, N .... *jener Punkte auf null zu erhalten suchen, so hat man die Gleichung*

$$(31)\quad 0 = \left(P_1 - \frac{d^2p_1}{dt^2}\right) \times \delta p_1 + \left(P_2 - \frac{d^2p_2}{dt^2}\right) \times \delta p_2 + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N + \ldots,$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0 \ldots$$

zur Bestimmung der Beschleunigung eines jeden Punktes vollkommen ausreicht.»

Dies ist die auf unsere Analyse zurückgeführte Form der allgemeinen Gleichung der Mechanik, wie sie von La Grange der ganzen Mechanik zu Grunde gelegt ist, und damit ist also auch die ganze Mechanik dieser neuen Analyse unterworfen. Als Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens will ich eine beliebige einfache Aufgabe der Statik wählen, nämlich die Aufgabe, den Gleichgewichtszustand eines Systems von Punkten p_0, p_1 .... p_n zu finden, welche so aneinander befestigt sind, dass die Entfernung je zweier aufeinander folgender Punkte konstant bleibt, und welche ausserdem beziehlich von den beschleunigenden Kräften P_0, P_1 .... P_n gezogen werden. Für die Substitution in (31) hat man erstens, daß Gleichgewicht Statt finden soll, die sämmtlichen Beschleunigungen null zu setzen. Von den Kräften, durch welche je zwei aufeinander folgende Punkte aneinander befestigt sind, nehmen wir an, dass sie die Entfernungen je zweier Punkte, oder, um eine Funktion zweiter Dimension zu bekommen, die Quadrate der Verbindungsstrecken konstant zu erhalten suchen. Wir erhalten also, wenn wir der Kürze wegen die Punkte mit p_α, die Kräfte mit P_α bezeichnen, wo α nach der Reihe die Indices $0 \ldots n$ ausdrückt, die Gleichung

$$(32,\mathrm{a})\quad \ldots\quad \mathfrak{S}\overline{P_\alpha \times \delta p_\alpha} + \mathfrak{S}\overline{\lambda_\alpha\, \delta[(p_{\alpha+1} - p_\alpha)^2]} = 0,$$

wo die Summenzeichen sich auf die verschiedenen Werthe von α beziehen, das erste auf die Werthe von 0 .... n, das letzte auf die Werthe von 0 ....$(n-1)$, d. h. alle Werthe von λ_α, in denen α nicht einen der Werthe $0, 1, 2 \ldots (n-1)$ hat, sind null gesetzt. Diese Gleichung in Verbindung mit den n Gleichungen

$$(32,\mathrm{b})\quad \ldots\quad (p_{\alpha+1} - p_\alpha)^2 = a_\alpha^2,$$

welche die konstanten Entfernungen, deren Quadrate eben a_α^2 sind, darstellen, bestimmen den Gleichgewichtszustand vollkommen. Es ist aber

$$\frac{1}{2}\,\delta[(p_{\alpha+1} - p_\alpha)^2] = (p_{\alpha+1} - p_\alpha) \times \delta(p_{\alpha+1} - p_\alpha)$$
$$= (p_{\alpha+1} - p_\alpha) \times \delta p_{\alpha+1} - (p_{\alpha+1} - p_\alpha) \times \delta p_\alpha.$$

Dadurch hat man, da (32,a) für jede Werthreihe von δp_α null ist, also auch die mit einem und demselben δp_α multiplicirten Glieder derselben zusammen null geben müssen, die $(n+1)$ Gleichungen

$$(32,c) \quad \ldots\ P_\alpha + \lambda_{\alpha-1}(p_\alpha - p_{\alpha-1}) - \lambda_\alpha(p_{\alpha+1} - p_\alpha) = 0.$$

Addirt man zwei aufeinanderfolgende dieser Gleichungen, z. B. die, welche P_α und die, welche $P_{\alpha+1}$ enthält, so erhält man

$$0 = P_\alpha + P_{\alpha+1} + \lambda_{\alpha-1}(p_\alpha - p_{\alpha-1}) - \lambda_{\alpha+1}(p_{\alpha+2} - p_{\alpha+1});$$

oder allgemeiner, addirt man alle Gleichungen in (32,c) zwischen den Anzeigern α' und dem als grösser gedachten α, so hat man

$$0 = P_{\alpha'} + \ldots + P_\alpha + \lambda_{\alpha'-1}(p_{\alpha'} - p_{\alpha'-1}) - \lambda_\alpha(p_{\alpha+1} - p_\alpha).$$

Also wenn α' null gesetzt wird, wo dann auch $\lambda_{\alpha'-1}$ nach dem Obigen null ist,

$$(32,d) \quad \ldots\ P_0 + P_1 + \ldots P_\alpha - \lambda_\alpha(p_{\alpha+1} - p_\alpha) = 0.$$

Ferner, wenn zugleich α gleich n gesetzt wird, wo dann λ_α null ist,

$$(33) \quad \ldots\ P_0 + P_1 + \ldots P_n = 0.$$

Um nun aus den Gleichungen 32,d allgemein λ_α zu eliminiren, hat man nur dieselben mit $(p_{\alpha+1} - p_\alpha)$ äusserlich zu multipliciren, da das äussere Produkt (das Parallelogramm) gleichgerichteter Strecken null ist. Man erhält also

$$(34) \quad \ldots\ (P_0 + P_1 \ldots P_\alpha) \cdot (p_{\alpha+1} - p_\alpha) = 0.$$

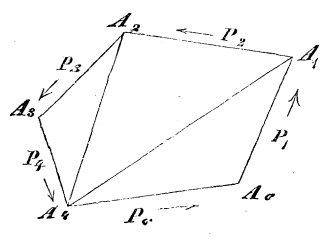
Diese n Gleichungen in (34), in Verbindung mit (33) und den n Bedingungsgleichungen in (32,c), bestimmen den Gleichgewichtszustand vollkommen, und es lässt sich alles, wenn noch der Anfangspunkt oder überhaupt einer der n Punkte gegeben ist, durch Konstruktion unmittelbar nach den Formeln finden, was überall der Vorzug dieser neuen Analyse ist. Es seien z. B. die Entfernungen a_α je zweier aufeinander folgender Punkte, die n Kräfte $P_0, P_1 \ldots P_{n-1}$ und die Lage des Punktes p_0 gegeben; die Kraft P_n und die Lage der Punkte $p_1 \ldots p_n$ seien gesucht. In der That drücken die Gleichungen (34) nur aus, dass jedesmal $P_0 + P_1 + \ldots P_\alpha$ parallel ist mit $p_{\alpha+1} - p_\alpha$. Daraus ergiebt sich folgende Konstruktion. Man zeichne ein $(n+1)$-eck $A_0, A_1 \ldots A_n$, dessen Seiten von der Ecke A_n aus fortschreitend genommen den Kräften $P_0, P_1 \ldots P_{n-1}$ gleich und gleichgerichtet sind, d. h. $A_0 - A_n = P_0$, $A_1 - A_0 = P_1$, $A_2 - A_1 = P_2$ u. s. w., so ist

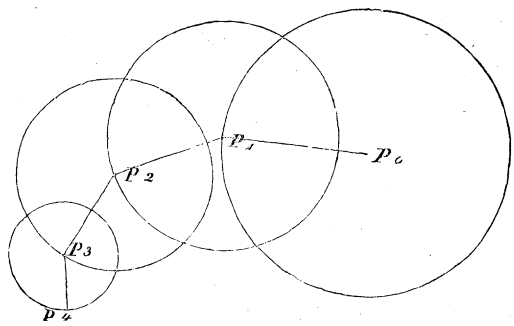
$$A_\alpha - A_n = P_0 + P_1 + \ldots P_\alpha,$$

und die Gleichung (34) wird

$$(35) \quad \ldots\ (A_\alpha - A_n) \cdot (p_{\alpha+1} - p_\alpha) = 0.$$

Wird die gesuchte Kraft P_n gleich $X - A_{n-1}$ gesetzt, wo X ein gesuchter Punkt ist, so geht die Gleichung (33) über in $A_{n-1} - A_n + X - A_{n-1} = 0$, d. h. $X = A_n$, d. h. die Seite $A_n - A_{n-1}$ der zu Hülfe genommenen Figur ist die gesuchte Kraft P_n. Ferner schlage man, um die Punkte $p_1 \ldots p_n$ zu





finden, um p_0 einen Kreis (oder im Raume eine Kugel) mit dem Halbmesser a_0, ziehe durch p_0 eine Gerade parallel mit P_0 (oder $A_0 — A_n$), so genügt jeder der beiden Punkte, worin diese Gerade den Kreis (oder die Kugel) schneidet, statt p_1 gesetzt den Bedingungen des Gleichgewichtes. Um p_1 schlage man mit a_1 als Halbmesser einen Kreis (eine Kugel) und ziehe von p_1 die Gerade parallel mit $A_1 — A_n$, so genügt jeder der Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kreises (der Kugel) statt p_2 gesetzt den Bedingungen des Gleichgewichtes u. s. f. Es giebt also im Ganzen 2^n Lagen des Gleichgewichtes. Allein man überzeugt sich leicht, dass es unter ihnen nur Eine Lage des sicheren Gleichgewichtes giebt, welche hervorgeht, wenn man statt der Geraden Strahlen zieht, die den Seiten $A_a — A_n$ entgegengesetzt gerichtet sind.

Es liesse sich freilich die angegebene Konstruktion auch leicht aus der Idee unmittelbar ableiten, Allein verfolgt man diese begriffliche Ableitung, so wird man sogleich sehen, dass sie mit der durch unsere Analyse gegebenen identisch und nur ihre Uebersetzung gleichsam in die Begriffssprache ist. Und dies ist überall der wesentlichste Vorzug der neuen Analyse.

Ich gehe nun dazu über, die vorher abgebrochene Entwickelung der neuen Analyse weiter fortzuführen. Ich hatte oben aus der Idee der Kongruenz das innere Produkt zweier Strecken abgeleitet. Jede Strecke erschien als Differenz zweier Punkte, und das innere Produkt zweier Strecken also in der Form $(a — b) \times (c — d)$, wo a, b, c, d Punkte sind. Um von hier aus durch Auflösung der Klammern zu inneren Produkten von Punkten, und von Punkten mit Strecken zu gelangen, will ich mich eines allgemeinen Ableitungsgesetzes bedienen, welches überhaupt für die neue Analyse von der grössten Wichtigkeit ist. Nämlich:

« *Wenn gewisse Gesetze allgemein gelten für Differenzen je zweier Grössen aus einer Grössenreihe* $(a, b, c \ldots)$, *und man hat irgend eine Gleichung* (A), *worin jene Grössen* $(a, b, c \ldots)$ *nur zu Differenzen gepaart vorkommen, und man leitet aus dieser Gleichung* (A) *dadurch, dass man jene Gesetze auch auf jene Grössen selbst statt auf ihre Differenzen anwendet, eine neue Gleichungsform* (B) *ab: so erhält man aus ihr, wenn man statt der Grössenreihe* $(a, b, c \ldots)$ *die Reihe der Differenzen* $(a — r, b — r \ldots)$ *dieser Grössen von irgend einer beliebigen Grösse* (r) *dieser Reihe setzt, jedesmal eine richtige Gleichung; und wenn B wieder jene Grössen nur zu Differenzen gepaart enthält, so ist auch B selbst eine richtige Gleichung; und zwar erfolgt dies alles auch dann noch, wenn man für solche Differenzen nur das Gesetz allgemein annimmt, dass* $(a — b) + (b — c) = a — c$ *sei* [1]).»

In der That, da $(a — b) + (b — r) = a — r$ ist, also auch

1) *Satz* 12.

(35) . . . . $a - b = (a - r) - (b - r)$,

so kann man aus der Gleichung A durch dies für die Differenzen vorausgesezte Gesetz eine Gleichung A' ableiten, in welcher statt der Grössen $a, b, c \ldots$, die in A vorkommen, nur die Differenzen $a - r$, $b - r$, $c - r$ .... eingetreten sind. Leite ich nun aus A dadurch, dass ich die für Differenzen jener Grössen allgemein geltenden Gesetze auch auf diese Grössen selbst anwende, eine Gleichungsform B ab, so werde ich, indem ich dieselben Gesetze auf die Differenzen $a - r$, $b - r$ .... statt auf a, b .... selbst anwende, zu einer richtigen Gleichung B' gelangen, welche sich von B nur dadurch unterscheidet, dass statt der Grössen a, b .... in B hier die Differenzen $a - r$, $b - r$ .... eingetreten sind. Kommen ferner in der Gleichungsform B die Grössen a, b .... nur zu Differenzen gepaart vor, so werden auch in B' die Differenzen $a - r$, $b - r$.... nur wiederum zu Differenzen gepaart vorkommen. Statt jeder solchen Differenz der Differenzen $a - r$, $b - r$ .... kann ich aber nach dem durch die Gleichung (35) dargestellten Gesetze die entsprechende Differenz der Grössen a, b .... selbst setzen, ohne dass die Gleichung aufhört eine richtige zu sein. Dadurch erhalte ich aber aus B' die Form B. Da also B' eine richtige Gleichung war, so ist es unter der zuletzt gemachten Voraussetzung auch B.

Hieran schliesse ich nun die Definition, welche vermöge des so eben bewiesenen Satzes vollkommen ausreicht für alle analytischen Gesetze der Punktverknüpfungen, wenn die der Streckenverknüpfungen bekannt sind. Nämlich:

«*Eine Gleichung* (B), *welche Punkte enthält, die wenigstens nicht alle zu Differenzen gepaart sind, setze ich dann und nur dann als richtig, wenn sich eine richtige Gleichung* (A) *auffinden lässt, in welcher die Punkte nur zu Differenzen gepaart vorkommen, und welche die Beschaffenheit hat, dass man aus ihr, wenn man die bisher für Strecken allgemein erwiesenen Verknüpfungsgesetze auch auf Punkte anwendet, die gegebene Gleichung* (B) *ableiten kann* [1].»

Hieraus folgt sogleich, dass, wenn man eine richtige Punktgleichung B hat, in welcher die Punkte wenigstens nicht alle zu Differenzen gepaart sind, und man aus ihr dadurch, dass man die Punkte wie Strecken behandelt, eine Gleichungsform C ableitet, in welcher gleichfalls wenigstens nicht alle Punkte zu Differenzen gepaart sind, diese gleichfalls eine richtige Gleichung ist. Denn nach der Definition ist B nur dann richtig, wenn sie sich aus einer richtigen Streckengleichung A durch Anwendung der für Strecken geltenden Gesetze auch auf Punkte ableiten lässt. Da nun aus A auf solche Weise B, aus B wieder C abgeleitet ist, so ist also auch aus A die letzte C auf solche Weise ableitbar, also C richtig. Aber vermöge des vorhergehenden Satzes (12) können wir, da für die Strecken $a - b$, $b - c$, auch wenn a, b, c Punkte sind, die Voraussetzung jenes Satzes, dass $(a - b) + (b - c) = a - c$ ist, allgemein gilt, noch weiter gehen, und sagen, auch wenn C eine Streckengleichung ist, die aus B auf die angegebene Weise hervorgeht, sei sie richtig; denn dann geht C auch aus A auf solche Weise, nämlich durch Anwendung der für Strecken geltenden Gesetze auf Punkte hervor, also ist C auch nach dem angeführten Satze richtig, wenn A es ist. Also:

1) *Erklärung* 8.

«*Wenn man eine richtige Gleichung, welche Punkte enthält, dadurch, dass man die für Strecken allgemein geltenden Gesetze auch auf Punkte anwendet, in eine andere Gleichung umwandelt, so ist diese gleichfalls richtig.*» Diesen Satz kann ich auch so ausdrücken und erweitern:

«*Alle für Strecken allgemein geltenden Verknüpfungsgesetze gelten auch für Punkte und überhaupt für Punktgrössen*[1]),» nämlich auch für Punktgrössen darum, weil dieselben Gesetze, die für Strecken allgemein gelten, auch für Vielfache derselben, da diese Vielfachen gleichfalls Strecken sind, gelten müssen, also auch für die Vielfachen der Punkte, d. h. für Punktgrössen. Ferner folgt vermittelst desselben Satzes (12), da jede richtige Punktgleichung (B) nach der Definition (8) aus einer richtigen Streckengleichung A ableitbar ist, also der in jenem Satze (12) für die Punktgleichung B aufgestellten Bedingung unterliegt, der Satz:

«*Eine richtige Punktgleichung bleibt richtig, wenn man statt der sämmtlichen darin vorkommenden Punkte* (a, b ....) *die Differenzen* ($a-r$, $b-r$ ....) *derselben von einem und demselben Punkte* (r) *setzt*[2]).»

Durch Anwendung dieser beiden Sätze (13 und 14) gehen alle Gesetze der Verknüpfungen von Punkten und Punktgrössen aufs leichteste hervor, wenn man die Gesetze der Verknüpfungen von Strecken kennt. Ich will daher hier gelegentlich und zur besseren Vergleichung auch die Gesetze der Addition und Subtraktion der Punktgrössen aus denen der Strecken ableiten. Sind $a, b, c \ldots$ Punkte, und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Zahlgrössen, und ist zuerst

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots = 0,$$

so hat man, wenn r ein beliebiger Punkt ist,

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \ldots &= \alpha a + \beta b + \ldots - (\alpha + \beta + \ldots) r \\ &= \alpha(a-r) + \beta(b-r) + \ldots, \end{aligned}$$

d. h., wenn wir $\alpha, \beta \ldots$ die Gewichte der Punktgrössen $\alpha a, \beta b \ldots$, $(\alpha+\beta+\ldots)$ ihr *Gesammtgewicht*, und $\alpha(a-r) + \beta(b-r) + \ldots$ ihre *Gesammtabweichung* von dem Punkte r nennen:

«*Eine Summe von Punktgrössen, deren Gesammtgewicht null ist, ist eine Strecke; ihre Gesammtabweichung von einem veränderlichen Punkte ist konstant, und der Strecke gleich, die ihre Summe ist*[3]).»

Ferner ist das Gesammtgewicht nicht null, so sei ihre Summe einer noch unbekannten Punktgrösse ϱx gleich gesetzt, wo ϱ eine Zahlgrösse, x ein Punkt ist, also

$$(35) \quad \ldots \ldots \quad \alpha a + \beta b + \ldots = \varrho x,$$

so ist nach Satz 14

$$(36) \quad \ldots \ldots \quad \alpha(a-r) + \beta(b-r) + \ldots = \varrho(x-r).$$

Subtrahirt man diese Gleichung von (35), so hat man

$$(\alpha + \beta + \ldots) r = \varrho r,$$

---

1) *Satz* 13.
2) *Satz* 14.
3) *Satz* 15.

also wieder nach Satz 14, wenn r' ein anderer Punkt ist,

$$(\alpha + \beta + \ldots.)\,(r - r') = \varrho\,(r - r'),$$

was eine Streckengleichung ist, aus welcher folgt

$$(37) \quad \ldots. \quad \alpha + \beta + \ldots. = \varrho.$$

Substituirt man diesen Werth in (36), so hat man

$$(38) \quad \ldots. \quad \alpha(a - r) + \beta(b - r) + \ldots. = (\alpha + \beta + \ldots.)\,(x - r),$$

oder da $(\alpha + \beta + \ldots.)$ nicht null ist,

$$(39) \quad \ldots. \quad x - r = \frac{\alpha(a - r) + \beta(b - r) + \ldots.}{\alpha + \beta + \ldots.}.$$

Wird nun x aus dieser Gleichung bestimmt, was durch eine einfache Konstruktion möglich ist, so ist auch Gleichung (38) richtig, also ist, da (35), nachdem für ϱ und x die gefundenen Werthe substituirt sind, unmittelbar aus (38) hervorgeht, nach Satz 13 auch (35) richtig, während die vorhergehende Entwickelung zeigt, dass, wenn (35) richtig sein soll, ϱ und x nothwendig den in (37) und (38) gegebenen Bestimmungen unterliegen müssen.

Setzen wir übrigens in (36) x gleich r, so haben wir

$$(40) \quad \ldots. \quad \alpha(a - x) + \beta(b - x) + \ldots. = 0.$$

Bekanntlich nennt man diesen Punkt x den Schwerpunkt zwischen den mit den Gewichten $\alpha, \beta \ldots.$ behafteten Punkten $a, b \ldots.$, oder mathematischer ausgedrückt die *Mitte zwischen den Punktgrössen* $\alpha a, \beta b \ldots.$ Also:

«*Eine Summe von Punktgrössen, deren Gesammtgewicht nicht null ist, ist wieder eine Punktgrösse, deren Gewicht das Gesammtgewicht der addirten Punktgrössen* (37), *und deren Ort die Mitte zwischen ihnen ist* (38); *die Gesammtabweichung der Punktgrössen von einem beliebigen Punkte ist gleich der ihrer Summe von demselben Punkte* (36), *ihre Gesammtabweichung von der Mitte ist also null* (40), *und die Mitte wird also auch gefunden* (39), *wenn man von einem Punkte die Strecken nach den Orten der Punktgrössen zieht, diese Strecken mit den zugehörigen Gewichten multiplicirt, die Produkte addirt, die Summe durch das Gesammtgewicht dividirt, und eine diesem Quotienten gleiche Strecke zieht, welche jenen Punkt zum Anfangspunkte hat; dann ist der Endpunkt dieser Strecke die gesuchte Mitte* [1].» Wenn wir sagen, das *Gewicht einer Strecke* sei null, und wenn wir Strecken und Punktgrössen zusammen *Grössen erster Stufe* nennen, so folgt aus Satz 15 und 16 sogleich der Satz: «*Das Gewicht einer Summe von Grössen erster Stufe ist gleich der Summe der Gewichte der Summanden*» oder allgemeiner:

«*Eine Gleichung zwischen Grössen erster Stufe, d. h. eine Gleichung, in welcher die Grössen erster Stufe nur der Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung unterworfen sind, bleibt richtig, wenn man statt der Grössen erster Stufe ihre Gewichte setzt* [2].»

Ich gehe nun zu den inneren Produkten von 2 Grössen erster Stufe über.

1) *Satz* 16.
2) *Satz* 17.

Sowohl das innere Produkt zweier Punktgrössen, als auch das einer Punktgrösse in eine Strecke lässt sich als Differenz zweier Quadrate oder als Vielfaches dieser Differenz darstellen. In der That, wenn im Folgenden unter a, b, c Punkte, unter α, β, γ Zahlgrössen, unter p eine Strecke verstanden ist, so hat man

$$a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b) = \frac{a + b}{2} \times 2(a - b).$$

Der letzte Ausdruck ist ein Produkt eines Punktes und einer Strecke. Hat man daher irgend ein Produkt einer Punktgrösse und einer Strecke, etwa $\gamma c \times p$, welches gleich $c \times \gamma p$ ist, so hat man nur $\frac{a + b}{2}$ gleich c und $2(a - b)$ gleich γp zu setzen, wodurch a und b bestimmt sind, wenn γ, c, p gegeben sind, und erhält dann $\gamma c \times p = a^2 - b^2$, wodurch das innere Produkt einer Punktgrösse in eine Strecke auf die Differenz zweier inneren Punktquadrate zurückgeführt ist. Eben so ist

$$\alpha(a^2 - p^2) = \alpha(a + p) \times (a - p),$$

wo $a + p$ und $a - p$ Punkte sind. Hat man daher irgend ein Produkt zweier Punktgrössen $\beta b \times \gamma c$, welches gleich $\beta\gamma b \times c$ ist, so hat man nur α gleich $\beta\gamma$, b gleich $a + p$ und c gleich $a - p$ zu setzen, wodurch α, a, p bestimmt sind, wenn β, γ, b, c gegeben sind, und erhält dann $\beta b \times \gamma c$ gleich $\alpha(a^2 - p^2)$. Beide Resultate in Worten ausgedrückt:

«*Das Produkt einer Punktgrösse und einer Strecke ist gleich der Differenz* $(a^2 - b^2)$ *der Quadrate zweier Punkte* a *und* b, *welche den Ort der Punktgrösse in der Mitte zwischen sich haben, und deren Abstand* $(a - b)$ *gleich der mit dem halben Gewichte der Punktgrösse multiplicirten Strecke jenes Produktes ist. Und das Produkt zweier Punktgrössen ist gleich der mit einem Koefficienten* α *multiplicirten Differenz* $a^2 - p^2$ *der Quadrate eines Punktes* a *und einer Strecke* p, *indem der Koefficient* α *gleich dem Produkte der Gewichte beider Punktgrössen, der Punkt* a *die Mitte zwischen ihren Orten und das Quadrat der Strecke* p *gleich dem Quadrate des Abstandes eines dieser Orte von der Mitte ist.*» Statt $\alpha(a^2 - p^2)$ können wir auch schreiben $\alpha a^2 - \alpha p^2$; somit können wir eine beliebige Summe von inneren Produkten auf die Form

$$\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2 + \ldots + A_1 + A_2 + \ldots,$$

oder mit der Summenbezeichnung auf die Form

$$\mathbf{S}\overline{\alpha a^2} + \mathbf{S}\overline{A}$$

bringen, wo α Zahlgrössen, a Punkte und A innere Streckenprodukte bezeichnen. Also eine jede Gleichung zwischen inneren Produkten wird sich auf die Form

$$(41) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{\alpha a^2} + \mathbf{S}\overline{A} = 0$$

bringen lassen. Soll nun diese Gleichung richtig sein, so muss nach Satz 14 für jeden Punkt r

$$(42) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{\alpha(a - r)^2} + \mathbf{S}\overline{A} = 0$$

sein, d. h.

$$(43) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{\alpha a^2} + \mathbf{S}\overline{A} - 2r \times \mathbf{S}\overline{\alpha a} + r^2 \mathbf{S}\overline{\alpha} = 0.$$

Diese Gleichung von der gegebenen (41) subtrahirt, erhält man

$$(44) \quad \ldots \quad 2r \times \mathbf{S}\overline{\alpha a} - r^2 \mathbf{S}\overline{\alpha} = 0.$$

Also wieder nach Satz 14 für jeden Punkt r'

$$(45) \quad \ldots \quad 2(r-r') \times \mathbf{S}\overline{\alpha(a-r')} - (r-r')^2 \mathbf{S}\overline{\alpha} = 0.$$

Da man r und r' beliebig wählen kann, so kann man r von r' verschieden annehmen, und r so wählen, dass die Strecke $r - r'$ senkrecht wird gegen die Strecke $\mathbf{S}\overline{\alpha(a-r')}$; dann wird in (45) das erste Glied (nach Satz 3) null; also erhält man

$$(r - r')^2 \mathbf{S}\overline{\alpha} = 0;$$

und da hierin r von r' verschieden, also $(r-r')^2$ nicht null ist, so muss

$$(46) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{\alpha} = 0$$

sein. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (45), welche für alle Lagen der Punkte r und r' gilt, so hat man

$$2(r-r') \times \mathbf{S}\overline{\alpha(a-r')} = 0$$

noch immer für jede Lage der Punkte r und r'. Nun kann man hier also auch r so wählen, dass es von r' verschieden, aber $r - r'$ nicht senkrecht auf $\mathbf{S}\overline{\alpha(a-r')}$ ist; dann muss (nach Satz 3) $\mathbf{S}\overline{\alpha(a-r')}$ null sein; also, da $r'\mathbf{S}\overline{\alpha}$ nach (46) null ist, so muss

$$(47) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{\alpha a} = 0$$

sein. Diese Gleichung schliesst (nach Satz 17) die Gleichung (46) mit ein. Wenn nun ausser dieser Gleichung (47) noch für irgend einen Punkt r die Gleichung (42) gilt, so folgt daraus, weil aus (42) die (43) hervorgeht, und diese vermöge (47) und der von dieser mit eingeschlossenen (46) sich in (41) verwandelt, die Richtigkeit dieser letzteren. Also eine Gleichung von der Form (41) ist dann und nur dann richtig, wenn die Gleichung (47) und für irgend einen Punkt r die Gleichung (42) stattfindet. Diese ganze Schlussreihe fasst einen ausserordentlichen Reichthum von Beziehungen in sich, die ich nun, wie auch den Satz selbst in Begriffe kleiden will.

Ich will die Grösse αa die *Mittelgrösse* des vielfachen Punktquadrates αa^2 nennen und sagen, die Mittelgrösse eines inneren Streckenproduktes sei null, ferner will ich die Grösse $\alpha(a-r)^2$ die *Abweichung* des vielfachen Punktquadrates αa^2 von dem Punkte r nennen und sagen, die Abweichung eines inneren Streckenproduktes von einem beliebigen Punkte sei diesem inneren Streckenpro-

dukte selbst gleich. Setzen wir dies fest, so lässt sich das Resultat der vorhergehenden Entwickelung in folgenden Satz fassen:

«*Eine Gleichung, deren Glieder vielfache Punktquadrate und innere Streckenprodukte sind, ist dann und nur dann richtig, wenn die beiden Gleichungen, welche hervorgehen, wenn man einestheils statt der Glieder ihre Mittelgrössen und anderntheils statt derselben ihre Abweichungen von irgend einem Punkte* (r) *setzt, richtig sind.*»

Wir können diesen Satz in noch einfacherer und allgemeinerer Form aussprechen, indem wir unter der Mittelgrösse und unter der Abweichung einer Summe von vielfachen Punktquadraten und inneren Streckenprodukten, wenn diese Summe sich nicht auf Ein solches vielfaches Punktquadrat oder auf Ein inneres Streckenprodukt zurückführen lässt, die Summe aus den Mittelgrössen oder aus den Abweichungen der Stücke jener Summe verstehen, die Abweichungen nämlich immer auf denselben Punkt bezogen. Ferner will ich jene vielfachen Punktquadrate sowohl als auch die inneren Streckenprodukte und beliebige Summen beider Arten von Grössen *innere Grössen* nennen. Dann folgt unmittelbar der allgemeine Satz:

«*Jede Gleichung, deren Glieder innere Grössen sind, ist dann und nur dann richtig, wenn die beiden Gleichungen, welche hervorgehen, wenn man einestheils statt der Glieder ihre Mittelgrössen und anderntheils statt derselben ihre Abweichungen von irgend einem Punkte r setzt, richtig sind.*» Oder:

«*Gleiche innere Grössen haben gleiche Mittelgrössen und gleiche Abweichungen von jedem beliebigen Punkte, und umgekehrt wenn zwei innere Grössen gleiche Mittelgrössen und gleiche Abweichungen von irgend einem Punkte haben, so sind sie einander gleich* [1]).»

Wir gehen nun von diesen allgemeinen Sätzen zu den besonderen Fällen über, um überall möglichst bestimmte Anschauungen zu gewinnen. Betrachten wir die Summe beliebig vieler innerer Grössen, die immer in der Form

$$\mathfrak{S}_{\alpha a^2} + \mathfrak{S}_A$$

dargestellt werden kann, so können hier 3 wesentlich verschiedene Fälle eintreten, welche die 3 Arten von inneren Grössen liefern. Nämlich die Summe der Mittelgrössen oder, was dasselbe ist, die Mittelgrösse der Summe kann null oder eine Strecke oder eine Punktgrösse sein. Nach diesen 3 Hauptfällen wollen wir die Betrachtung der besonderen Fälle sondern. Erstens, «*wenn die Summe der zu den inneren Grössen gehörigen Mittelgrössen, also auch die zu der Summe jener inneren Grössen gehörige Mittelgrösse selbst null ist, so ist diese Summe ein inneres Streckenprodukt, nämlich dasjenige, was der Summe der Abweichungen jener inneren Grössen von irgend einem Punkte gleich ist* [2]).» Dies ergiebt sich nicht nur aus obigem Satze 18, sondern auch unmittelbar, indem dann

$$\mathfrak{S}_{\alpha a^2} + \mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}_{\alpha a^2} - 2r\mathfrak{S}_{\alpha a} + r^2\mathfrak{S}_\alpha + \mathfrak{S}_A$$

1) *Satz* 18.
2) *Satz* 19.

ist, weil $\mathbf{S}\overline{\alpha a}$ und also auch $\mathbf{S}\overline{\alpha}$ null sind, also ist jener Ausdruck

$$= \mathbf{S}\overline{\alpha(a-r)^2} + \mathbf{S}\overline{A},$$

da

$$(48) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{\alpha a^2} - 2r\mathbf{S}\overline{\alpha a} + r^2\mathbf{S}\overline{\alpha} = \mathbf{S}\overline{\alpha(a-r)^2}$$

ist. Zugleich liegt hierin der direkte Nachweis, dass in diesem Falle die Summe der Abweichungen von einem veränderlichen Punkte konstant ist, also namentlich

$$\mathbf{S}\overline{\alpha(a-r)^2}$$

konstant ist, wenn r veränderlich und $\mathbf{S}\overline{\alpha a}$ null ist. Die beiden anderen Fälle nun führen uns zu den Begriffen der neuen Grössen. Nämlich es sei zweitens die Summe der Mittelgrössen eine Strecke p, d. h. (nach Satz 15) die Summe ihrer Gewichte sei null.

Ich gehe hier von dem einfachsten Falle aus, nämlich von der Betrachtung der Summe $a^2 + (-1)b^2$, oder, was dasselbe ist, der Differenz $a^2 - b^2$, also der Differenz zweier Punktquadrate. Diese ist, wie wir schon oben zeigten, einem inneren Produkte von Punkt und Strecke gleich, nämlich

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b),$$

und setzen wir hier $a + b = 2c$, so dass also c die Mitte ist zwischen a und b, und setzen wir die Strecke $a - b = p$, so folgt, dass

$$(49) \quad \ldots \quad a^2 + (-1)b^2 = 2c \times p = c \times 2p$$

ist, wenn

$$(50) \quad \ldots \quad a + b = 2c, \text{ und } a - b = p$$

ist. Durch diese Gleichungen ist die Mittelgrösse und die Abweichung eines inneren Produktes $c \times 2p$ von Punkt und Strecke bestimmt, da sie der Mittelgrösse und Abweichung der ihm gleichgesetzten Summe $a^2 + (-1)b^2$ gleich sein muss. Nun ist die Mittelgrösse dieser Summe gleich $a + (-1)b = a - b = p$, d. h. die Mittelgrösse eines inneren Produktes von Punkt und Strecke ist der Hälfte dieser Strecke gleich. Ferner die Abweichung der Summe $a^2 + (-1)b^2$ von r ist $(a-r)^2 + (-1)(b-r)^2$. Dies ist gleich $a^2 - b^2 - 2(a-b) \times r$, also gleich $(a + b - 2r) \times (a - b)$, also aus (50) substituirt gleich $(c - r) \times 2p$. Also ist auch der zuletzt gefundene Ausdruck die Abweichung des inneren Produktes $c \times 2p$ von dem Punkte r, d. h., die Abweichung eines inneren Produktes $c \times q$ aus Punkt und Strecke von einem Punkte (r) ist einem inneren Streckenprodukte gleich, dessen einer Faktor die Strecke jenes Produktes und dessen anderer Faktor die Abweichung $(c - r)$ des Punktes (c) jenes Produktes von dem Punkte r ist. Habe ich nun eine beliebige Summe innerer Grössen $\mathbf{S}\overline{\alpha a^2} + \mathbf{S}\overline{A}$ von der Art, dass der Mittelwerth dieser Summe eine Strecke p ist, so ist die Frage, ob ich auch diese Summe einem inneren Produkte $c \times q$ eines Punktes c in eine

Strecke q gleichsetzen kann. Es wird diese Gleichheit dann und nur dann stattfinden (nach Satz 18), wenn die Mittelgrösse sowohl als die Abweichung von irgend einem Punkte r bei $\mathfrak{S}\overline{\alpha a^2} + \mathfrak{S}\overline{A}$ eben so gross sind als bei $c \times q$. Die Mittelgrösse von $c \times q$ wird also dann gleich p, also $q = 2p$ sein müssen, und die Frage ist nur noch, ob c so gewählt werden kann, dass die Abweichung des Produktes $c \times 2p$ von einem Punkte r gleich der Abweichung jener Summe von demselben Punkte r sei; es sei die letztere Abweichung A_r, wo also A_r ein inneres Streckenprodukt darstellt. Es frägt sich also, ob c so gewählt werden kann, dass

$$(51) \quad \ldots \quad (c - r) \times 2p = A_r$$

sei. Man nehme zuerst irgend einen Punkt c' von der Beschaffenheit, dass $(c' - r) \times 2p$ nicht null ist, d. h. c' von r verschieden, und $c' - r$ nicht senkrecht gegen p ist, so wird, da innere Streckenprodukte immer mit Zahlengrössen proportional sind (Erklärung 3 und 4),

$$(c' - r) \times 2p = mA_r$$

gesetzt werden können, wo m irgend eine Zahlgrösse bedeutet, die nicht null ist. Nimmt man dann $(c - r) = \frac{1}{m}(c' - r)$, d. h., nimmt man eine Strecke, deren Anfangspunkt r ist und welche gleich dem m-ten Theile der Strecke $(c' - r)$ ist, und nennt den Endpunkt derselben c, so ist $(c - r) \times 2p = \frac{1}{m}(c' - r) \times 2p = \frac{1}{m} mA_r = A_r$, d. h., der so gefundene Punkt c genügt der Gleichung (51). Also ist nun in der That $c \times 2p$ jener Summe gleich. Ehe wir dies Resultat in Form eines Satzes aussprechen, wollen wir die Bedeutung eines inneren Produktes von Punkt und Strecke ins Auge fassen; diese Bedeutung hängt von der Beantwortung der Frage ab, wann zwei solche Produkte $a \times p$ und $b \times q$ gleichgesetzt werden können. Sollen sie gleich sein, so muss zuerst ihre Mittelgrösse gleich sein, also muss zuerst $p = q$ sein. Es frägt sich also, wann $a \times p = b \times p$ sei. Offenbar dann und nur dann, wenn $(a - b) \times p = 0$, d. h. entweder $a = b$, oder $a - b$ senkrecht gegen p ist, also zusammengefasst, wenn a und b in Einer gegen p senkrechten Ebene liegen. Da also zwei Produkte von Punkt und Strecke dann und nur dann gleich sind, wenn diese Strecke und die durch den Punkt gegen die Strecke senkrecht gelegte Ebene zusammenfällt, so bestimmt jene Strecke und diese Ebene den Begriff jenes inneren Produktes. Wir nennen daher das innere Produkt eines Punktes in eine Strecke eine Ebenengrösse oder eine *Plangrösse*, und zwar zur Unterscheidung von der bei der äusseren Multiplikation sich ergebenden Plangrösse (Grassm. Ausdehnungsl. §. 114) eine *innere* Plangrösse, und die Fläche, in welcher der Punktfaktor jenes Produktes sich frei bewegen kann, ohne den Werth des Produktes zu ändern, die *Faktorfläche* der Plangrösse. Nach diesen Bestimmungen können wir nun die gewonnenen Resultate in folgendem Satze zusammenfassen:

«*Das innere Produkt eines Punktes in eine Strecke ist eine innere Plangrösse, deren Mittelgrösse die Hälfte dieser Strecke, und deren Faktorfläche die*

durch den Punkt gegen die Strecke senkrecht gelegte Ebene ist. Die Abweichung derselben von einem Punkte r ist gleich einem inneren Produkte, dessen einer Faktor der Hälfte ihrer Mittelgrösse (oder der Strecke jenes Produktes) gleich ist, und dessen anderer Faktor die Abweichung eines beliebigen Punktes der Faktorfläche von dem Punkte r ist. Die Summe mehrerer innerer Grössen ist dann und nur dann eine innere Plangrösse, wenn die Mittelgrösse jener Summe einer Strecke von geltendem Werthe (d. h. die nicht null ist) gleich ist [1]).»

Hierin liegt auch der besondere Satz, dass die Summe von Plangrössen, wenn die Mittelgrösse der Summe nicht null ist, wieder eine Plangrösse liefert, während schon in Satz (19) nachgewiesen ist, dass diese Summe, wenn ihre Mittelgrösse null ist, einem inneren Streckenprodukte gleich sei. Um die innere Plangrösse mit der äusseren (Ausdehnungsl. §. 114) vergleichen zu können, sei eine beliebige Gleichung zwischen inneren Plangrössen und inneren Streckenprodukten

$$(52) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{a \times p} + \mathbf{S}\overline{q \times v} = 0$$

gegeben, worin die Grössen a Punkte, die Grössen p, q, v Strecken vorstellen, und es seien die den Grössen p, v senkrecht proportionalen Flächenräume P, V (vergleiche Erklärung 5). Dann werden die äusseren Produkte $a \,.\, P$ äussere Plangrössen sein, die äusseren Produkte $q \,.\, V$ aber Körperräume darstellen Nun lässt sich leicht nachweisen, dass, wenn die Gleichung (52) richtig ist, auch die Gleichung (53)

$$(53) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{a \,.\, P} + \mathbf{S}\overline{q \,.\, V} = 0$$

richtig sein müsse und umgekehrt aus (53) wieder (52) hervorgeht. Denn die erstere (52) ist nach Satz 18 dann und nur dann richtig, wenn $\mathbf{S}\overline{p} = 0$ und

$$(54) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{(a-r) \times p} + \mathbf{S}\overline{q \times v} = 0$$

ist, letztere für irgend einen Punkt r, und ebenso die letztere (53) nach Grassm. Ausdehnungslehre §. 112 dann und nur dann, wenn $\mathbf{S}\overline{P} = 0$ und

$$(55) \quad \ldots \quad \mathbf{S}\overline{(a-r) \,.\, P} + \mathbf{S}\overline{q \,.\, V} = 0$$

ist, letztere für irgend einen Punkt r. Nun haben wir oben (Satz 5, b) nachgewiesen, dass, wenn jene Gleichungen (54) gelten, auch diese (55) gelten müssen und umgekehrt, also wird auch (52) richtig sein, wenn (53) es ist, und umgekehrt. Also:

«*Innere Produkte, von deren beiden Faktoren jedesmal wenigstens einer eine Strecke, der andere eine beliebige Grösse erster Stufe ist, verhalten sich wie die äusseren Produkte, welche hervorgehen, wenn man statt jener Strecken die senkrecht proportionalen Flächenräume setzt, den andern Faktor in jedem Produkte unverändert lässt und das Zeichen der inneren Multiplikation in das der äusseren verwandelt, d. h., jede richtige Gleichung zwischen jenen inneren*

---

1) *Satz* 20.

Produkten bleibt richtig, wenn man statt ihrer diese äusseren Produkte setzt und umgekehrt [1]).»

Wegen dieser Uebereinstimmung in der Bedeutung habe ich beide Grössenarten mit dem gleichen Namen der Plangrössen bezeichnet. Ich will nun noch die Addition zweier Plangrössen und die einer Plangrösse und eines inneren Streckenproduktes im Einzelnen durchgehen. Bei der Addition zweier Plangrössen können wir 2 Fälle unterscheiden, nämlich dass sich ihre Ebenen schneiden oder nicht. Im ersteren Falle sei a ein gemeinschaftlicher Punkt beider Ebenen, so ist $a \times p + a \times q = a \times (p + q)$, d. h. «*die Summe zweier Plangrössen, die sich schneiden, ist eine Plangrösse, deren Ebene mit den Ebenen der beiden zu summirenden Plangrössen eine gleiche Durchschnittskante hat, und deren Mittelgrösse die Summe ist aus denen der Summanden.*» Wenn die Ebenen sich nicht schneiden, d. h. also parallel laufen, so werden die Mittelgrössen Vielfache derselben Strecke p sein. Sind dann $a \times \alpha p$ und $b \times \beta p$ die beiden Summanden, so ist

$$a \times \alpha p + b \times \beta p = (\alpha a + \beta b) \times p = s \times (\alpha + \beta) p,$$

wenn $(\alpha + \beta) s = \alpha a + \beta b$ und $\alpha + \beta$ nicht null ist, d. h. s die Mitte zwischen αa und βb ist. Also «*die Summe zweier paralleler Plangrössen ist, wenn die Summe ihrer Mittelgrössen nicht null ist, eine Plangrösse, deren Mittelgrösse die Summe ist aus denen der Summanden, und deren Ebene denen der Summanden parallel ist und so liegt, dass, wenn man eine Gerade zieht, welche diese Ebene in s schneidet und die Ebenen der Summanden in a und b, s die Mitte ist zwischen zwei Punktgrössen, die in a und b liegen und deren Gewichte sich wie die zugehörigen Mittelgrössen der Summanden verhalten.*»

Wenn die Summe der beiden Mittelgrössen null ist, so folgt, da $a \times p - b \times p = (a - b) \times p$ ist, «*dass dann die Summe ein inneres Streckenprodukt sei, dessen einer Faktor die Hälfte p von der Mittelgrösse des einen Summanden, und dessen anderer Faktor eine beliebige Strecke von einem Punkte in der Ebene des anderen Summanden nach einem Punkte in der Ebene des ersteren ist.*» Da endlich $a \times p + q \times p = (a + q) \times p$ ist, so folgt: »*Die Summe einer inneren Plangrösse und eines inneren Streckenproduktes ist wieder eine innere Plangrösse, deren Mittelwerth gleich ist dem der ersteren und deren Ebene dadurch hervorgeht, dass die Ebene jener ersteren Plangrösse um eine Strecke q vorrückt, welche mit der Hälfte p der Mittelgrösse ein inneres Produkt liefert, das dem gegebenen inneren Streckenprodukt gleich ist.*»

Nun schreite ich zu dem dritten Falle der Addition innerer Grössen, wo nämlich die Mittelgrösse der Summe eine Punktgrösse ist. Und dieser Fall ist es, der zu ganz neuen, keiner der früheren Grössengattungen proportional zu setzenden Grössen führt. Zuerst kann man jedesmal jede solche Summe, deren Mittelgrösse eine Punktgrösse αa ist, die nicht null ist, gleich $\alpha a^2 + A$ setzen, wenn nur A die Abweichung jener Summe von dem Punkte a ist; denn die Abweichung der Grösse $\alpha a^2 + A$ von dem Punkte a ist gleich A, also Mittelgrösse und Abweichung von dem Punkte a dann auf beiden Seiten gleich, also

1) *Satz* 21.

die Gleichung richtig (nach Satz 18). Da hier αa, also auch α nicht null sein soll, so kann man statt $\alpha a^2 + A$ auch schreiben $\alpha(a^2 + A')$, wo $A' = \frac{A}{\alpha}$. Es treten hier für die nähere Betrachtung 3 wesentlich verschiedene Fälle hervor, je nachdem nämlich A' negativ, positiv oder null ist. Im ersteren Falle sei $A' = -p^2$, so wird $\alpha(a^2 + A')$ gleich

$$\alpha(a^2 - p^2) = \alpha(a + p) \times (a - p),$$

d. h. gleich dem vielfachen inneren Produkte zweier Punkte, deren Mitte a und deren Entfernung von der Mitte quadrirt p^2 giebt. Die Mittelgrösse αa eines solchen vielfachen Punktproduktes ist also die mit dem Koefficienten multiplicirte Mitte beider Punkte (daher der Name Mittelgrösse), und die Abweichung desselben von der Mitte ist das mit dem Koefficienten multiplicirte Quadrat der Entfernung eines der beiden Punkte von ihrer Mitte. Hieraus folgt also sogleich, dass zwei vielfache innere Punktprodukte gleich sind, wenn der Koefficient, die Mitte der Punkte und das Quadrat der Entfernung dieser Punkte von der Mitte bei beiden gleich sind; oder anders ausgedrückt, ein solches Produkt behält seinen Werth, wenn der Koefficient konstant ist und die Punkte Endpunkte eines Durchmessers einer festen Kugelfläche bleiben. Da somit ein solches Produkt an die Kugelfläche geknüpft ist, so nennen wir das vielfache innere Produkt zweier Punkte eine *Kugelgrösse*, und jene Kugelfläche, in welcher die Punktfaktoren sich bewegen können, ohne den Werth des Produktes zu ändern, die *Faktorfläche* der Kugelgrösse. Wir gehen nun zu dem andern Falle über, wo A' positiv gleich p^2 ist, also $\alpha(a^2 + A') = \alpha(a^2 + p^2)$ ist. Dann lässt sich $a^2 + p^2$ nicht in reelle Punktfaktoren zerlegen, also hat dann jene Grösse $\alpha(a^2 + p^2)$ auch keine reelle Faktorfläche. Dagegen lässt sich diese Grösse offenbar als Summe von Punktquadraten oder von vielfachen Punktquadraten mit positiven Koefficienten darstellen, und am einfachsten in der Form $\beta(b^2 + c^2)$.

In der That wird dann und nur dann

$$\alpha(a^2 + p^2) = \beta(b^2 + c^2)$$

sein, wenn erstens die Mittelgrösse beider Seiten gleich, also

$$\alpha a = \beta(b + c), \text{ d. h. } \frac{b + c}{2} = a \text{ und } \beta = \frac{\alpha}{2},$$

also a die Mitte zwischen b und c ist, und zweitens die Abweichung beider Seiten von irgend einem Punkte, z. B. der Mitte a gleich gross ist. Die der linken Seite ist ap^2, die der rechten $\beta((b - a)^2 + (c - a)^2)$, oder da $\beta = \frac{\alpha}{2}$ und $(b - a)^2$, da a die Mitte ist zwischen b und c, gleich $(c - a)^2$ ist, so ist die Abweichung der rechten Seite von a gleich $\alpha(b - a)^2$, d. h. also wenn zweitens $(b - a)^2 = p^2$ ist. Es lässt sich also jene Grösse $\alpha(a^2 + p^2)$ in der That als eine mit der Hälfte des Koefficienten α multiplicirte Summe der Quadrate zweier Punkte b und c darstellen, deren Mitte a, und deren quadrirte Entfernung von der Mitte gleich p^2 ist. Daraus folgt, dass man, ohne den Werth des Ausdrucks zu ändern, statt der Punkte b und c zwei beliebige

andere b' und c' nehmen kann, welche gleichfalls a zu ihrer Mitte haben und von a eben so weit abstehen wie jene, oder anders ausgedrückt, welche Endpunkte eines Durchmessers derjenigen Kugelfläche sind, die die Linie von b nach c zu ihrem Durchmesser hat. Also auch diese Grösse $\alpha(a^2 + p^2)$ oder $\alpha(a^2 + A')$, wo A' positiv ist, bleibt an eine Kugelfläche geknüpft. Wir nennen daher auch diese Grösse eine Kugelgrösse, und wollen die Fläche, auf welcher sich die Punkte, als deren vielfache Quadratsumme jene Grösse sich darstellen lässt, ohne Werthänderung der Grösse bewegen können, die *Mittelfläche der Kugelgrösse* nennen.

Um diese Idee der Mittelfläche (als einer mittleren) näher ins Auge zu fassen, wollen wir eine beliebige Summe von n Punktquadraten betrachten, also etwa $a_1^2 + a_2^2 + \ldots$ oder kürzer geschrieben $\mathbf{S}\overline{a^2}$, so ist die Mittelgrösse dieser Summe $\mathbf{S}\overline{a}$ oder ns, wenn s der Schwerpunkt zwischen den Punkten a_1, a_2 . . ist; und die Abweichung von diesem Schwerpunkte s ist $\mathbf{S}\overline{(a - s)^2}$. Das arithmetische Mittel sämmtlicher Abweichungen von s ist

$$\frac{\mathbf{S}\overline{(a - s)^2}}{n}, \text{ was } = p^2$$

gesetzt werden mag. Dann ist

$$\mathbf{S}\overline{a^2} = n(s^2 + p^2),$$

weil beide Seiten gleiche Mittelgrösse $\left(\mathbf{S}\overline{a} = ns\right)$ und gleiche Abweichung von s $\left(\mathbf{S}\overline{(a - s)^2} = np^2\right)$ haben. Nun ist aber p der Halbmesser der Kugelfläche; die wir die Mittelfläche genannt haben, und ihr Quadrat ist das arithmetische Mittel zwischen den verschiedenen Abweichungen der Punktquadrate a_1^2, a_2^2 . . . ., oder denkt man sich durch jeden der Punkte a_1, a_2 . . . eine Kugelfläche gelegt, welche die Mitte s zu ihrem Mittelpunkte hat, so ist die Mittelfläche eine Kugelfläche mit demselben Mittelpunkt, deren Inhalt (d. h., da es eine Fläche ist, deren Flächeninhalt) das arithmetische Mittel ist zwischen denen jener Kugelflächen, daher der Name der Mittelfläche. Wir nennen somit die Grösse $\alpha a^2 + A$, wenn α nicht null ist, mag nun A negativ oder positiv sein, ja auch wenn A null ist, eine Kugelgrösse, ihre Mittelgrösse ist αa, ihr Mittelpunkt a, ihr Gewicht α, ihre Abweichung vom Mittelpunkte ist A. Wir nennen diese Abweichung A den Inhalt oder Gehalt der Kugelgrösse [1]). Das vielfache Punktquadrat erscheint somit als eine Kugelgrösse, deren Inhalt null ist Ehe ich die gewonnenen Resultate in einem Satze zusammenfasse, will ich noch daran erinnern, dass wir $\frac{A}{\alpha} = A'$ setzten, und wenn A' negativ war,

---

1) Hierbei hat man nicht an den kubischen Inhalt der Kugel zu denken, sondern, da die Grösse als eine quadratische erscheint, an den Flächeninhalt, also an den Inhalt der Kugelfläche. In der That ist der Inhalt der Kugelgrössen dem mit dem Koefficienten multiplicirten Flächeninhalt der Kugelfläche proportional, wenn man nur noch die Kugelfläche, wenn sie Mittelfläche ist, positiv, wenn Faktorfläche, negativ setzt.

der Halbmesser der Faktorfläche quadrirt — A' (also einen positiven Werth) liefert, hingegen, wenn A' positiv war, der Halbmesser der Mittelfläche quadrirt A' selbst lieferte. Somit erhalten wir den Satz:

«*Es giebt drei Arten innerer Grössen: die inneren Streckenprodukte, welche den Zahlgrössen proportional sind, die inneren Plangrössen, welche den äusseren Plangrössen proportional sind, und die Kugelgrössen. Eine Summe innerer Grössen liefert ein inneres Streckenprodukt, eine innere Plangrösse oder eine Kugelgrösse, je nachdem die Mittelgrösse null, eine Strecke oder eine Punktgrösse ist. In dem letzten Falle ist der Inhalt der Kugelgrösse der Abweichung jener Summe von dem Mittelpunkte dieser Kugelgrösse gleich. Wenn dieser Inhalt null ist, so verwandelt sich die Kugelgrösse in ein vielfaches oder einfaches Punktquadrat; wenn er nicht null ist, so liefert die Summe entweder eine Kugelgrösse mit reeller Faktorfläche oder mit reeller Mittelfläche, je nachdem der durch das Gewicht dividirte Inhalt der Kugelgrösse positiven oder negativen Werth hat. Beide Flächen sind Kugelflächen, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugelgrösse ist, das Quadrat von dem Halbmesser der Mittelfläche ist dem durch das Gewicht dividirten Inhalte gleich, das Quadrat von dem Halbmesser der Faktorfläche ist das Entgegengesetzte dieses Quotienten*[1]).»

Es kommt nun nur noch darauf an, durch möglichst bestimmte geometrische Anschauungen die Summe zweier Kugelgrössen oder einer Kugelgrösse mit einer andern inneren Grösse zu fixiren. Zuerst seien zwei innere Grössen mit reellen Faktorflächen (also Kugelgrössen dieser Art oder Plangrössen) zu addiren, deren Faktorflächen sich treffen (schneiden, berühren oder zusammenfallen): so werden sich beide, wenn a ein gemeinschaftlicher Punkt ist, in der Form $a \times b$, $a \times c$ darstellen lassen, wo b und c beliebige Grössen erster Stufen sind (Strecken oder Punktgrössen, je nachdem die inneren Grössen Plan- oder Kugel-Grössen sein sollen). Da ihre Summe $a \times (b + c)$ ist, so folgt, dass diese Summe auch eine innere Grösse mit reeller Faktorfläche ist, deren Faktorfläche mit denen der Summanden dieselben Punkte gemeinschaftlich hat, wie diese unter sich. Also:

«*Zwei innere Grössen mit reellen sich treffenden Faktorflächen liefern als Summe wieder eine innere Grösse mit reeller Faktorfläche, deren Faktorfläche mit denen der Summanden alle Punkte gemeinschaftlich hat, die diese unter sich gemeinschaftlich haben, und deren Mittelgrösse die Summe aus den Mittelgrössen der Summanden ist*[2]).»

Hieraus folgt eine höchst einfache Konstruktion der Faktorfläche der Summe unter den angeführten Bedingungen. Nämlich man konstruire, wenn die Summe der Gewichte nicht null ist, nach Satz 16 den Ort der Mittelgrösse, d. h. die Mitte zwischen den mit den zugehörigen Gewichten behafteten Mittelpunkten beider Kugelgrössen, und schlage um diesen Punkt als Mittelpunkt eine Kugelfläche, welche durch einen der gemeinschaftlichen Punkte beider Faktorflächen geht, so ist diese die Faktorfläche der Summe, und wenn die Summe

1) *Satz* 22.
2) *Satz* 23, a.

der Gewichte null ist, so lege man eine Ebene durch die gemeinschaftlichen Punkte beider Faktorflächen, oder wenn sie sich berühren, eine in diesem Berührungspunkte gleichfalls die beiden Faktorflächen berührende Ebene, so ist diese Ebene die Faktorfläche der Summe. Um auch im allgemeineren Falle die Summation der Kugelgrössen auf geometrische Anschauungen zurückzuführen, will ich noch eine Benennung einführen, durch welche ich die geometrischen Beziehungen zwischen Kugelgrössen stets rein geometrisch ausdrücken kann. Nämlich ich werde die Kugelgrösse $a^2 - p^2$, welche als inneres Produkt zweier Punkte $(a + p) \times (a - p)$ erschien, schlechthin einer Kugelfläche gleich setzen, deren Mittelpunkt a und deren Halbmesser p ist. Dann ist klar, dass $a^2 + p^2$, da es gleich $a^2 - (\sqrt{-1}\,p)^2$ ist, als Kugelfläche mit reellem Mittelpunkte a und imaginärem Halbmesser $\sqrt{-1}\,p$ erscheint; ich will eine solche eine ideelle Kugelfläche, und die Kugelfläche $a^2 - p^2$ die ihr entsprechende reelle Kugelfläche nennen. Noch will ich bemerken, dass der Gehalt einer Kugelfläche $a^2 - p^2$ der oben angegebenen Bestimmung gemäss gleich dem negativen Quadrat ihres Halbmessers, also gleich $-p^2$, der der ideellen Kugelfläche also positiv ist. Hiernach können wir nun den obigen Satz 23 auch so ausdrücken:

«*Die Vielfachensumme zweier Kugelflächen, die sich treffen, ist eine vielfache Kugelfläche oder eine Plangrösse, je nachdem die Koefficientensumme geltenden Werth hat oder null ist, ihre Fläche hat mit den gegebenen Kugelflächen dieselben Punkte gemeinschaftlich, wie diese unter sich, und ihre Mittelgrösse ist die entsprechende*[1]*) Vielfachensumme der Mittelpunkte beider Kugelflächen*[2]*).*»

Namentlich ist die Fläche der Differenz zweier sich schneidender Kugelflächen die Ebene des Durchschnittes beider, und die Fläche der Differenz zweier sich berührender Kugelflächen die Ebene, welche beide in ihrem gemeinschaftlichen Berührungspunkte gleichfalls berührt. Ich betrachte nun zuerst die Differenzebene zweier Kugelflächen auch im allgemeineren Falle.

Es ist die Differenz zweier Kugelflächen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gleich einer Plangrösse, deren Mittelwerth die Differenz der beiden Mittelwerthe von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, und deren Abweichung von irgend einem beliebigen Punkte gleich der Differenz der Abweichungen jener Kugelflächen von demselben Punkte ist. Da nun die Abweichung der Plangrösse von einem Punkte ihrer Ebene, aber auch von keinem andern null ist, so ist diese Ebene, d. h. die Differenzebene beider Kugelflächen der Ort eines Punktes c, in Bezug auf welchen die Differenz der Abweichungen beider Kugelflächen null ist, d. h. von dem beide Kugelflächen gleich weit abweichen, d. h. eines Punktes, der, wenn

$$\boldsymbol{A} = a^2 + A, \quad \boldsymbol{B} = b^2 + B$$

ist, der Gleichung

$$(56) \quad \ldots \quad (a - c)^2 + A = (b - c)^2 + B$$

---

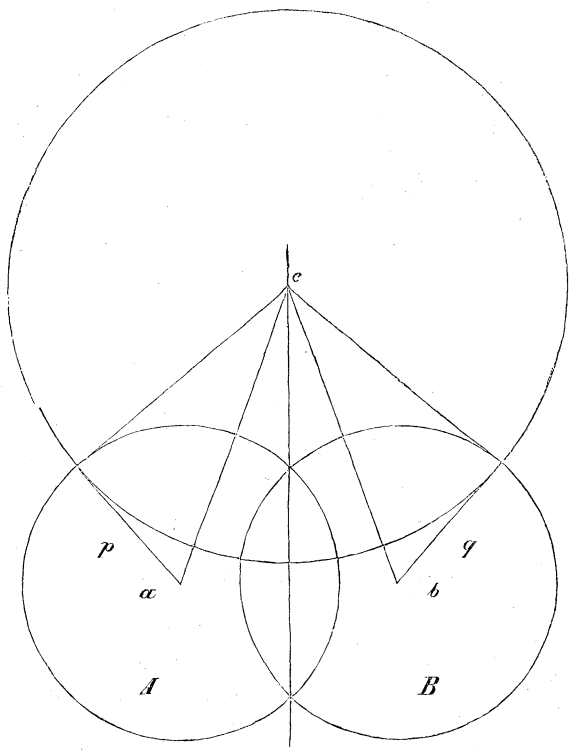
1) Dass unter der entsprechenden Vielfachensumme die mit denselben Koefficienten verstanden ist, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

2) *Satz* 23, b.

Genüge leistet. Sind zuerst beide Kugelflächen null, also A gleich $-p^2$, B gleich $-q^2$, wo p und q Strecken, nämlich die Halbmesser der Kugelflächen sind, so folgt:

$$(57) \quad \ldots \quad (a - c)^2 - p^2 = (b - c)^2 - q^2.$$

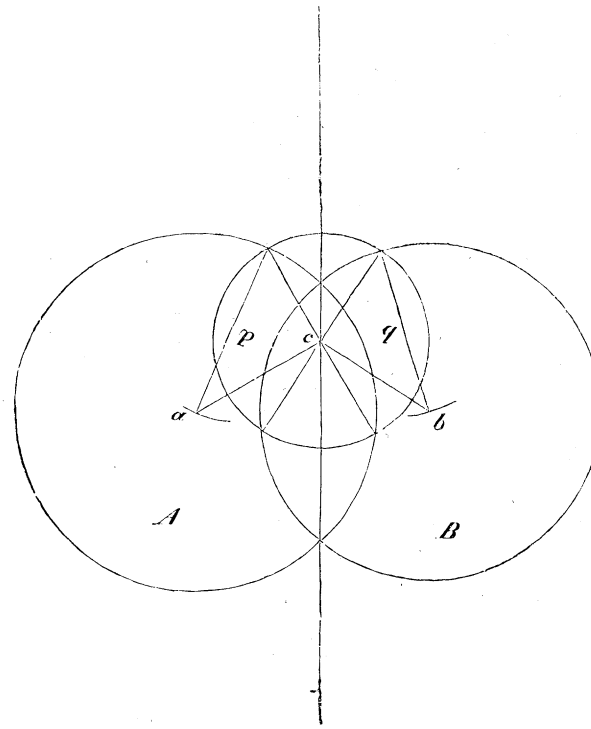
Liegt nun c ausserhalb der Kugelfläche $\boldsymbol{A}$, so ist $(a - c)^2 > p^2$, also auch $(b - c)^2 > q^2$. Dann ist klar (s. Fig.), dass die linke Seite das Quadrat



der von c an $\boldsymbol{A}$, die rechte das der von c an $\boldsymbol{B}$ gezogenen Tangente ausdrückt, also sind beide Tangenten gleich lang. Schlägt man daher um c als Mittelpunkt eine Kugelfläche, deren Halbmesser diesen Tangenten gleich ist, so wird diese senkrecht geschnitten von den gegebenen Kugelflächen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. Der ausserhalb der beiden Kugelflächen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ liegende Theil der Differenzebene ist also der Ort für die Mittelpunkte aller von jenen beiden Kugelflächen zugleich senkrecht geschnittenen Kugelflächen. Liegt c innerhalb $\boldsymbol{A}$, so ist $(a - c)^2$ kleiner als p^2, also auch $(b - c)^2$ kleiner als q^2. Dann wird man die Gleichung (57) auch schreiben können:

$$p^2 - (a - c)^2 = q^2 - (b - c)^2 = s^2.$$

Dann ist s (s. Fig.) die Hälfte derjenigen Sehne in jeder Kugelfläche, die

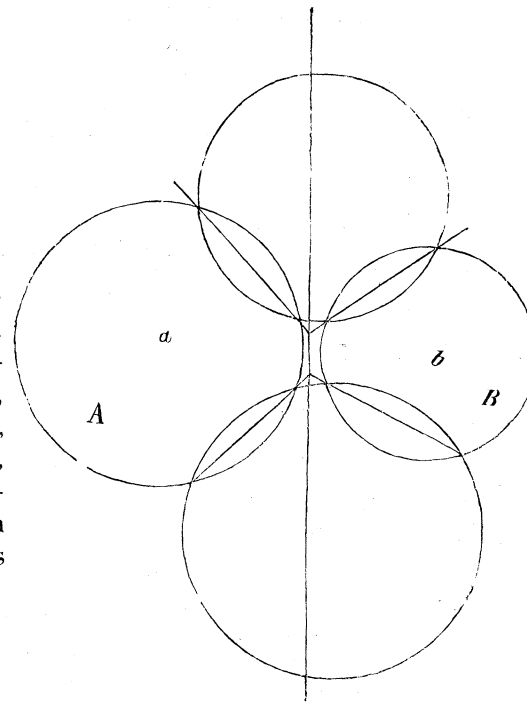


durch c halbirt wird, und die Gleichung sagt aus, dass diese Hälften für beide Kugelflächen gleich lang sind. Lege ich also um c als Mittelpunkt eine Kugelfläche, deren Halbmesser s ist, so wird diese durch jede der beiden Kugelflächen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gehälftet, und der innerhalb der beiden Kugelflächen gelegene Theil der Differenzebene (wenn es einen solchen giebt) ist also der Ort für die Mittelpunkte aller durch $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zugleich gehälfteten Kugelflächen. Also:

«*Die Differenzebene zweier Kugelflächen ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche von jenen beiden zugleich entweder senkrecht geschnitten oder gehälftet werden* [1]),» d. h. sie ist das, was man die Ebene der gleichen Potenzen beider Kugelflächen oder ihre ideelle Durchschnittsebene genannt hat. Die Konstruktion dieser Differenzebene kann man, wenn die Kugelflächen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sich nicht schneiden, dadurch leicht auf den Fall zweier sich schneidenden Kugelflächen zurückführen, dass man Kugelflächen zu Hülfe nimmt, welche die beiden gegebenen zugleich schneiden. Die Punkte der geraden Linie, in welcher die Ebenen der beiden Durchschnitte einer solchen Kugelfläche mit $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sich untereinander schneiden, weichen von diesen beiden Kugelflächen gleich weit ab [2]); konstruirt man also durch zwei solche schneidende

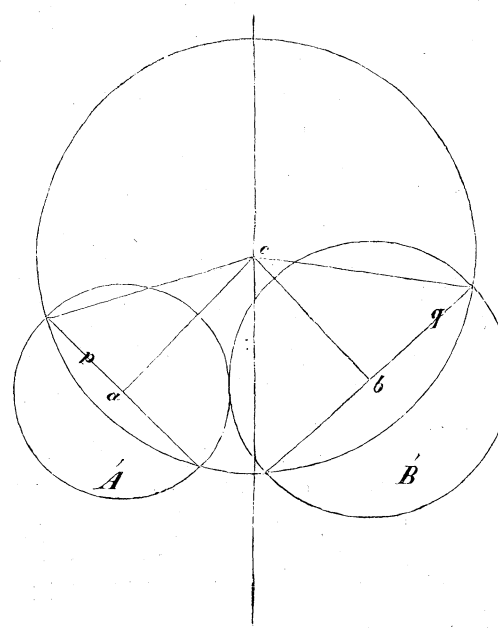
1) *Satz* 24.

2) Unter der Abweichung eines Punktes von einer Kugelfläche verstehen wir nämlich dasselbe, was wir unter der Abweichung der letzteren von dem ersteren verstanden.



Kugelflächen zwei solche gerade Linien, so ist die durch beide gelegte Ebene die gesuchte Differenzebene (s. Fig.). Es seien zweitens beide Kugelflächen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ ideell, und die ihnen zugehörigen reellen Kugelflächen $\boldsymbol{A'}$ und $\boldsymbol{B'}$ seien durch Konstruktion gegeben, so hat man, wenn $A = p^2$ und $B = q^2$, also $\boldsymbol{A} = a^2 + p^2$, $\boldsymbol{B} = b^2 + q^2$, p und q somit die Halbmesser der ihnen entsprechenden reellen Kugelflächen sind, aus (56)

$$(58) \quad \ldots \quad (a - c)^2 + p^2 = (b - c)^2 + q^2 = v^2;$$



dann ist v der Halbmesser einer $\boldsymbol{A'}$ und $\boldsymbol{B'}$ zugleich hälftenden Kugelfläche, deren Mittelpunkt c ist (s. Fig.). «*Also ist die Differenzebene zweier ideeller Kugelflächen der Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche die jenen ideellen entsprechenden reellen Kugelflächen hälften.*» Die Konstruktion dieser Differenzebene erfolgt leicht: nämlich man ziehe von a und b aus die gegen die gerade Linie ab senkrechten Halbmesser p und q, ziehe eine gerade Linie, welche die Verbindungsstrecke beider Endpunkte derselben senkrecht hälftet, und durch den Durchschnitt c' dieser Geraden mit ab lege man die gegen ab senkrechte Ebene, so ist dies die gesuchte Differenzebene, weil nämlich die um c' als Mittelpunkt durch die Endpunkte der Halbmesser

gelegte Kugelfläche die Kugelflächen $\boldsymbol{A}'$ und $\boldsymbol{B}'$ hälftet und die Differenzebene senkrecht gegen ab ist. Endlich sei die eine Kugelfläche, etwa $\boldsymbol{A}$, reell, die andere, $\boldsymbol{B}$, ideell und $\boldsymbol{B}'$ die ihr entsprechende reelle, so hat man, wenn $\boldsymbol{A} = a^2 - p^2$, $\boldsymbol{B} = b^2 + q^2$, also $A = -p^2$, $B = q^2$ ist, aus (56)

$$(a - c)^2 - p^2 = (b - c)^2 + q^2 = v^2.$$

Dann ist v der Halbmesser einer um c als Mittelpunkt gelegten Kugelfläche, von der $\boldsymbol{A}$ senkrecht geschnitten, $\boldsymbol{B}'$ gehälftet wird. Also:

«*Der Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, von welchen eine gegebene Kugelfläche* $\boldsymbol{A}$ *senkrecht geschnitten, und zugleich eine andere* $\boldsymbol{B}'$ *gehälftet wird, ist eine Ebene, nämlich die Differenzebene zwischen der ersteren* $\boldsymbol{A}$ *und der der letzteren entsprechenden ideellen Kugelfläche* $\boldsymbol{B}$.» Die Konstruktion dieser Ebene kann man leicht auf eine der beiden früheren dadurch zurückführen, dass man die Gehalte $-p^2$ und $+q^2$ um gleich viel wachsen oder abnehmen lässt, und zwar um so viel, dass dadurch beide Kugelflächen entweder ideell oder reell werden; die Differenz, also auch die Differenzebene wird dadurch nicht geändert, und durch dies Wachsen oder Abnehmen entstehen Kugelflächen, die den gegebenen koncentrisch sind, und deren Halbmesserquadrate um eben so viel zu- oder abnehmen, die also stets leicht zu konstruiren sind. Es kann nun noch die umgekehrte Aufgabe entstehen, nämlich wenn von den beiden Kugelflächen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ die eine $\boldsymbol{A}$, der Mittelpunkt b der andern und die Differenzebene beider (welche dann natürlich, wenn die Lösung möglich sein soll, eine gegen die Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrechte Lage haben muss) gegeben ist, die andere $\boldsymbol{B}$ oder, wenn sie eine ideelle sein sollte, die ihr entsprechende reelle Kugelfläche $\boldsymbol{B}'$ durch Konstruktion zu finden. Ist die gegebene Kugelfläche $\boldsymbol{A}$ eine reelle, so ist, wenn sie die Differenzebene schneidet oder berührt, die andere Kugelfläche $\boldsymbol{B}$ dadurch bestimmt, dass sie die Differenzebene in derselben Kreislinie schneidet oder in demselben Punkte berührt. Schneidet hingegen die reelle Kugelfläche $\boldsymbol{A}$ die gegebene Differenzebene nicht, so hat man nur um den Punkt d, worin die Verbindungslinie ab beider Mittelpunkte die Differenzebene schneidet, eine die gegebene Kugelfläche $\boldsymbol{A}$ senkrecht schneidende Kugelfläche I' zu legen. Dann ist, wenn b ausserhalb I' liegt, diejenige um b gelegte Kugelfläche $\boldsymbol{B}$, welche gleichfalls I' senkrecht schneidet, die gesuchte, wenn aber b innerhalb der Kugelfläche I' liegt, so ist $\boldsymbol{B}$ eine ideelle Kugelfläche, und die ihr entsprechende reelle $\boldsymbol{B}'$ ist dann die von I' senkrecht gehälftete Kugelfläche, welche b zum Mittelpunkte hat. Ist aber $\boldsymbol{A}$ eine ideelle Kugelfläche, und die ihr entsprechende reelle $\boldsymbol{A}'$ ist durch Konstruktion gegeben, so hat man nur den auf ab senkrechten Halbmesser p der Kugelfläche $\boldsymbol{A}'$ zu ziehen, und durch den Endpunkt dieses Halbmessers eine Kugelfläche I' zu legen, welche den Durchschnitt d der Verbindungslinie ab und der Differenzebene zum Mittelpunkte hat, so ist wieder die gesuchte Kugelfläche $\boldsymbol{B}$ entweder die, welche von I' senkrecht geschnitten wird, oder die gesuchte Kugelfläche $\boldsymbol{B}$ ist ideell und die entsprechende reelle $\boldsymbol{B}'$ die, welche von I' gehälftet wird.

Nachdem ich nun die Eigenschaften der Differenzebene entwickelt habe, gehe ich zu der allgemeineren Aufgabe über, die Fläche I' einer Vielfachen-

summe $\alpha A + \beta B$ zweier Kugelflächen A und B zu konstruiren, oder wenn sie ideell sein sollte, die ihr entsprechende reelle I'. Ist $\alpha + \beta = 0$, also $\beta = -\alpha$, so wird jene Vielfachensumme gleich $\alpha(A - B)$ und liefert also eine Plangrösse, deren Ebene der Differenzebene $A - B$ identisch und also nach dem Früheren gefunden ist. Wir nehmen also an, $\alpha + \beta$ sei nicht null; dann ist die Summe eine Kugelgrösse, deren Gewicht $(\alpha + \beta)$ ist, die also in der Form $(\alpha + \beta) I'$ dargestellt werden kann, wo I' die gesuchte Kugelfläche ist. Man hat also

$$(59) \quad \ldots \quad \alpha A + \beta B = (\alpha + \beta) I'.$$

Soll diese Gleichung richtig sein, so muss (nach Satz 18) erstens die Mittelgrösse beider Seiten gleich sein, d. h der Mittelpunkt von I' muss die Mitte zwischen den mit den Koefficienten α und β behafteten Mittelpunkten von A und B sein, wodurch also der Mittelpunkt von I' gefunden ist. Zweitens muss nach demselben Satze die Abweichung beider Seiten von jedem beliebigen Punkte r gleich sein; es sei diese Abweichung einer Kugelgrösse A von einem Punkte r der Kürze wegen mit A_r bezeichnet, so muss

$$(60) \quad \ldots \quad \alpha A_r + \beta B_r = (\alpha + \beta) I'_r$$

sein; und umgekehrt wenn der Mittelpunkt von I' auf die angegebene Weise bestimmt ist, und die Abweichungen in (59) von irgend einem Punkte gleich sind, so ist die Gleichung (59) richtig, alles dies nach Satz 18. Ist nun c irgend ein Punkt der Differenzebene zwischen A und B, so hat man nach dem Obigen $A_c = B_c$, wird also dies in (60) substituirt, nachdem man c statt r gesetzt hat, so erhält man

$$(\alpha + \beta) A_c = (\alpha + \beta) I'_c,$$

also, da $\alpha + \beta$ nicht null ist,

$$A_c = I'_c$$

d. h. «*ein Punkt, welcher von zwei oder (da der Schluss sich auf beliebig viele Glieder ausdehnen lässt) von mehreren Kugelflächen gleich weit abweicht, weicht auch von der Kugelfläche jeder Vielfachensumme derselben, wenn die Koefficientensumme nicht null ist, um eben so viel ab;*» und für unsern Fall ergiebt sich, dass, wenn eine Kugelgrösse die Summe zweier andern ist, die Differenzebenen zwischen je zwei der zu ihnen gehörenden Kugelflächen zusammenfallen, und auch umgekehrt, wenn dies der Fall ist und zugleich die Mittelgrösse der einen Kugelgrösse die Summe aus denen der andern beiden ist, so ist auch jene Kugelgrösse die Summe dieser beiden. Hieraus ergiebt sich die Konstruktion der Summenfläche I' sehr leicht. Nämlich man konstruire die Differenzebene $A - B$ und die Mitte zwischen αa und βb (wo a und b die Mittelpunkte von A und B sind) und lege um diese Mitte nach der oben angegebenen Konstruktionsweise eine Kugelfläche, welche mit A gleichfalls die Ebene $A - B$ als Differenzebene hat, so ist dies die gesuchte Kugelfläche der Summe.

Hiermit glaube ich die wichtigsten Gesetze über innere Produkte zweier Grössen erster Stufe abgethan zu haben. Freilich liegt in dem Früheren noch unmittelbar ein Keim zu einer vollständigeren Auffassung des inneren Pro-

duktes, ein Keim, dessen Entfaltung durch den Gang der früheren Entwickelung gleichsam geboten wird und daher zur organischen Einheit des Ganzen nothwendig erscheint. Nämlich wir hatten schon in Erklärung (6) und (7) und den daraus folgenden Sätzen die inneren Produkte von zwei Ausdehnungen höherer Stufen gewonnen, deren jede als äusseres Produkt von Strecken erschien; und andrerseits hatten wir in dem Uebertragungsgesetze (Satz 12) und in der darauf gebauten Erklärung (8) das Verfahren aufgestellt, wie man aus solchen Gleichungen, in denen nur Strecken vorkommen, die entsprechenden Gleichungen ableiten kann, in denen statt der Strecken Punkte eintreten. So erhalten wir dann statt der Ausdehnungsgrössen, welche zu inneren Produkten verknüpft waren, Produkte von Punkten, d. h. Elementargrössen höherer Stufen (s. Grassm. Ausdehnungsl. zweiter Abschnitt). Und wir haben in Satz (13) schon nachgewiesen, dass die sämmtlichen Gesetze, welche für die inneren Produkte der Ausdehnungsgrössen allgemein gelten, auch für diejenigen Elementargrössen oder überhaupt für diejenigen Grössen gelten müssen, welche hervorgehen, wenn man statt der Strecken, als deren Produkte jene Ausdehnungsgrössen erschienen, beliebige Punktgrössen setzt. Es käme also nur noch darauf an, die anschaulichen Begriffe dieser Verknüpfungen, deren Gesetze vermöge des angeführten Satzes gegeben sind, darzulegen. Da jedoch die Art dieser Darlegung keine Schwierigkeit mehr darbietet, indem sie ganz nach der Analogie des für die inneren Produkte zweier Punkte ausgeführten Verfahrens fortschreitet, so glaube ich, dieselbe hier übergehen zu dürfen. Dagegen würde die Auffassung des Quotienten, die wir bisher ganz übergangen haben, und namentlich des Quotienten nicht paralleler Strecken zu neuen, von allen früheren gänzlich verschiedenen Verknüpfungen, namentlich zu den Gesetzen des Potenzirens, Radicirens und Logarithmirens räumlicher Grössen führen, in denen der Winkel als Potenzexponent oder als Logarithmus erscheint. Doch da dies, wie man schon aus den gänzlich neuen Verknüpfungsweisen, die hierbei auf die Geometrie übertragen werden, abnehmen kann, eine ganz neue Entwickelungsreihe gegeben haben würde, deren Hinanführung bis zu einem Punkte, von dem aus sich die Einheit des Ganzen übersehen liesse, eine Entwickelung von grösserem Umfange als die vorliegende herbeigeführt haben würde, und da zugleich diese Entwickelungsreihe zwar an die Leibnizsche Charakteristik sich gleichfalls anschliessen lässt, aber doch nicht so eng mit ihr verkettet ist, wie die hier gegebene Analyse: so glaubte ich durch sie, wie wichtig und für die Anwendung fruchtreich sie auch sein mag, doch den Umfang dieser Abhandlung nicht vermehren zu dürfen. Auch glaube ich, dass die hier gegebene Entwickelung schon genügen wird, um zu zeigen, wie richtig Leibniz die eigenthümlichen Vortheile einer rein geometrischen Analyse im Voraus angeschaut habe. Leibniz hebt hier hervor, dass die Auflösung einer geometrischen Aufgabe durch Hülfe dieser Analyse zugleich die Lösung, die Konstruktion und den Beweis, und zwar auf eine natürliche Weise und auf solchen Wegen, die durch die Analyse selbst mit Nothwendigkeit sich ergeben, liefere [1]). Da nun in der hier dargelegten Analyse jede Gleichung nur der in

1) *Mais cette nouvelle characteristique ... ne manquera de donner en même temps la*

die Form der Analyse gekleidete Ausdruck einer geometrischen Beziehung ist, und diese Beziehung in der Gleichung, ohne durch willkührliche Grössen, wie etwa die Koordinaten der gewöhnlichen Analyse verhüllt zu sein, rein und klar sich ausspricht und daher aus ihr ohne Weiteres abgelesen werden kann; und da ferner jede Umgestaltung einer solchen Gleichung nur der Ausdruck einer ihr zur Seite gehenden Konstruktion ist, so folgt, dass in der That durch die angegebene Analyse die analytische Auflösung einer geometrischen Aufgabe gleichzeitig mit der Konstruktion und mit dem Beweise derselben erfolgt. Da ferner nichts Willkührliches, was mit der Natur der Aufgabe in keinem nothwendigen Zusammenhange steht, wie die Koordinaten der analytischen Geometrie, eingeführt zu werden braucht, so muss die Art der Lösung auch stets die der Natur der Aufgabe gemässe sein, und da sie die Form der Analyse hat, auch eine nothwendige, bei der von keinem Umhersuchen nach Auflösungsmethoden die Rede sein kann. Damit auch in der letzteren Beziehung diese Analyse allen Anforderungen genüge, müsste freilich die Theorie der Gleichungen, d. h. die Art, wie unbekannte Grössen aus ihnen eliminirt werden können, vollständig entwickelt werden. Aber man sieht, wie diese Theorie nach den zu Grunde gelegten Principien wenigstens möglich ist.

Ferner hebt er als einen wesentlichen Vorzug der geometrischen Analyse hervor, dass man durch sie die Mechanik fast wie die Geometrie müsste behandeln können, und überhaupt nur vermittelst ihrer hoffen dürfe, in die mathematische Behandlung der Physik tiefer einzudringen, und zum Beispiel die innere Konstitution der Naturkörper zu erforschen [1]). Nun glaube ich in der oben angeführten Anwendung auf die Mechanik gezeigt zu haben, wie sich in der That die Mechanik durch diese Analyse auf rein geometrische Weise behandeln lasse, woraus dann schon hervorgeht, dass diese Behandlungsweise, auf die Physik überhaupt übergetragen, die mathematische Behandlung der Physik auf eine ausgezeichnete Weise vereinfachen würde, wovon ich, wenn es der Raum gestattet hätte, noch leicht Beispiele aus der Optik, der Akustik, der Elektrodynamik und anderen Zweigen der Physik hätte geben können. Auch glaube ich endlich, dass man nicht mehr weit davon entfernt ist, die innere Konstitution der Naturkörper, d. h. die Lage ihrer einfachen oder zusammengesetzten Atome gegen einander zu ergründen; jedenfalls ist klar, schon aus den Anwendungen, welche diese Analyse auf die Krystallgestalten gestattet (vergl. Grassm. Ausdehnungslehre §. 171), dass dabei die neue Analyse unentbehrlich sein würde, wenn man nicht durch Einführung von Koordinaten und anderem die Behandlung störenden Apparate die Anschaulichkeit vernichten und die Methode in unnütze Weitläuftigkeiten verwickeln wollte. Endlich findet sich am Schlusse

---

solution et la construction et la demonstration géometrique, le tout d'une maniere naturelle et par une analyse, c'est à dire par des voyes determinées. Und weiterhin sagt er: *Mais l'utilité principale consiste dans les conséquences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne sçauroient s'exprimer par des figures ...., au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine.*

1) Er sagt: *Je crois, qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la géometrie* und *Enfin je n'espere pas, qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abregé .... Cependant il y a quelque esperance d'y arriver* (nämlich dazu, die innere Konstitution der zusammengesetzten Stoffe zu erforschen), *quand cette analyse veritablement géometrique sera établie.*

der Leibnizschen Darstellung noch eine merkwürdige Stelle, in welcher er die Anwendbarkeit dieser Analyse auch auf Gegenstände, die nicht räumlicher Natur sind, mit deutlichen Worten ausspricht, aber hinzufügt, dass es nicht möglich sei, hiervon in wenigen Worten einen klaren Begriff zu geben [1]). Nun lassen sich in der That, wie dies in Grassmanns Ausdehnungslehre durchweg geschehen ist, alle Begriffe und Gesetze der neuen Analyse ganz unabhängig von der räumlichen Anschauung entwickeln, indem sie rein an den abstrakten Begriff eines allmäligen (stetigen) Ueberganges geknüpft werden können; und es ist leicht zu sehen, wenn man einmal diese Idee des rein begrifflich gefassten stetigen Ueberganges in sich aufgenommen hat, dass auch die in dieser Abhandlung entwickelten Gesetze dieser von der räumlichen Anschauung gelösten Auffassung fähig sind. Dadurch ist dann auch dieser Gedanke Leibnizens verwirklicht, so dass, wie es mir scheint, nun nichts mehr übrig bleibt, was wesentlich dazu beitragen könnte, um die Richtigkeit alles dessen, was er von der geometrischen Analyse behauptet, abgerechnet einzelne Uebertreibungen, die aber mehr im Ausdruck liegen als in der Sache, ins Licht zu setzen, und um auch an diesem Gegenstande die bewundernswürdige Kraft eines Geistes zu erkennen, der von den ersten Anfängen einer unübersehbar grossen Entwickelungsreihe aus, die ganze Wichtigkeit dieser Entwickelungsreihe und die wesentlichen und eigenthümlichen Vortheile, welche sie darbieten müsse, zu überschauen vermochte.

---

1) *Je n'ay qu'une remarque à ajouter, c'est que je vois, qu'il est possible, d'étendre la caracteristique jusqu'aux choses, qui ne sont pas sujettes à l'imagination, mais cela est trop important et va trop loin, pour que je me puisse expliquer là-dessus en peu de paroles.*

DIE GRASSMANN'SCHE LEHRE

VON

PUNKTGRÖSSEN

UND DEN DAVON ABHÄNGENDEN GRÖSSENFORMEN,

DARGESTELLT VON

A. F. MÖBIUS.

Das Studium der voranstehenden Abhandlung und besonders des letztern Theils derselben dürfte, ungeachtet des nicht zu verkennenden Strebens ihres Verfassers nach Klarheit, dennoch mit einigen Schwierigkeiten verknüpft sein, welche daraus hervorgehen, dass der Verfasser seine neue geometrische Analysis auf eine Weise zu begründen sucht, welche dem bisher bei mathematischen Betrachtungen gewohnten Gange ziemlich fern liegt, und dass er nach Analogieen mit arithmetischen Operationen Objecte als Grössen behandelt, die an sich keine Grössen sind, und von denen man sich zum Theil keine Vorstellung bilden kann. Da gleichwohl diese neue Analysis wegen der Einfachheit, mit welcher sich geometrische Untersuchungen durch sie führen lassen, alle Aufmerksamkeit zu verdienen scheint, so habe ich es im Folgenden versucht, sie auf eine dem Geiste der Geometrie entsprechendere und damit, wie ich hoffe, leichter fassliche Weise zu begründen und zu zeigen, wie jene Scheingrössen als abgekürzte Ausdrücke wirklicher Grössen angesehen werden können. Uebrigens habe ich meinen Aufsatz nicht in der Form eines Commentars, sondern als eine selbstständige Abhandlung abgefasst, so dass er Jedem auch noch vor Lesung des Vorhergehenden verständlich sein wird. — Die von Herrn Grassmann eingeführten Benennungen habe ich unverändert beibehalten, sowie ich auch bei rein mathematischen Entwickelungen dieses Geometers von seinem Gange nicht wesentlich abgewichen bin. Was sonst noch von mir hinzugefügt worden, ist nicht von dem Belange, um hier besonders darauf aufmerksam zu machen.

§. 1.

Unter *Linien* sollen im Folgenden stets nur gerade Linien verstanden werden.

Von zwei Linien AB und CD, welche entweder einander parallel, oder Theile einer und derselben Geraden sind, sagt man, dass sie *einerlei* (*entgegengesetzte*) *Richtungen* haben, wenn, nachdem die eine Linie, es sei CD, parallel mit sich bis zum Zusammenfallen ihres Anfangspunktes C mit dem Anfangspunkte A der andern fortbewegt worden, die Endpunkte B und D beider Linien auf einerlei Seite (auf entgegengesetzten Seiten) des jetzt gemeinsamen Anfangspunktes liegen.

Durch das zwischen die Ausdrücke zweier Linien gesetzte Gleichheitszeichen, z B. durch

$$AB = CD,$$

soll hier *stets* angezeigt werden, dass die Linien AB und CD nicht nur von gleicher Länge sind, *sondern auch einerlei Richtung haben.* Eben so verstehe man unter der Formel

$$CD = \alpha AB,$$

in welcher α einen numerischen Coefficienten bedeutet, dass die absoluten Längen von AB und CD sich wie 1 und α verhalten, und dass CD mit AB einerlei Richtung oder die entgegengesetzte hat, jenachdem α positiv oder negativ ist. Hiernach ist immer $BA = -1 . AB$, statt dessen der Kürze willen $-AB$ geschrieben wird.

GEOMETRISCHE ADDITION DER LINIEN.

§. 2.

Sind zwei oder mehrere Linien AB, CD, EF ihrer Länge und Richtung nach gegeben, und macht man, von einem beliebigen Punkte O ausgehend, $OP = AB$, $PQ = CD$, $QR = EF$, so heisst die gerade Linie OR, deren Anfangs- und Endpunkt der Anfangs- und Endpunkt der durch die vollführte Operation entstandenen gebrochenen Linie $OPQR$ sind, die *geometrische Summe* der Linien AB, CD, EF, und die Operation selbst *geometrische Addition.* — Auf gleiche Art wird SV als die Summe der mit Coefficienten versehenen Linien αAB, γCD, εEF gefunden, wenn man, von einem beliebigen Punkte S ausgehend, $ST = \alpha AB$, $TU = \gamma CD$, $UV = \varepsilon EF$ macht. — Fällt der Endpunkt der gebrochenen Linie $OPQR$ oder $STUV$ mit ihrem Anfangspunkte zusammen, und entsteht daher ein geschlossenes Vieleck, so ist die Summe $= 0$.

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Länge und die Richtung der Linie, welche die Summe ausdrückt, sowohl vom Orte des Ausgangspunktes O oder S, als von der Ordnung, in welcher die zu addirenden Linien nach und nach an einander gesetzt werden, unabhängig sind, und mithin bloss von den Längen und Richtungen der letztern Linien abhängen.

Zusatz. Ist eine Linie OR die geometrische Summe mehrerer anderer Linien AB, CD, EF, und werden alle diese Linien durch Parallelebenen auf eine Gerade projicirt, so ist die Projection der erstern OR die algebraische Summe der Projectionen der andern Linien. Dies erhellet sogleich daraus, dass, wenn man, um OR zu finden, wie vorhin, $OP = AB$, $PQ = CD$, $QR = EF$ macht und OP, PQ, QR ebenfalls projicirt, von zwei einander gleichen und gleichgerichteten Linien, wie AB und OP, auch die Projectionen einander gleich und gleichgerichtet sind, und dass die Projection von OR der algebraischen Summe der Projectionen von OP, PQ, QR gleich ist.

§. 3.

Dass SV die geometrische Summe von αAB, γCD, εEF ist, werde ausgedrückt durch die Gleichung

$$SV = \alpha AB + \gamma CD + \varepsilon EF.$$

Eben so bedeute die Gleichung

$$\alpha AB + \gamma CD - \varepsilon EF = \varkappa KL - \mu MN,$$

dass die zwei Linien, welche die Summen von αAB, γCD, $-\varepsilon EF$ und von $\varkappa KL$, $-\mu MN$ darstellen, von gleicher Länge und einerlei Richtung sind.

Aus der Natur der geometrischen Zusammensetzung geht hervor, dass man Gleichungen dieser Art ganz wie algebraische behandeln kann, dafern sie nur hinsichtlich der in ihnen vorkommenden Linien von linearer Form bleiben; dass man daher Glieder von der einen Seite des Gleichheitszeichens auf die andere mit entgegengesetzten Vorzeichen setzen, alle Glieder mit derselben Zahl multipliciren oder dividiren, und zwei oder mehrere solcher Gleichungen zu einander addiren, oder die eine von der andern *subtrahiren*, d. i. mit veränderten Vorzeichen zu der andern addiren, kann.

§. 4.

Wenn von den zu addirenden Linien der Anfangspunkt der zweiten und jeder folgenden mit dem Endpunkte der jedesmal vorhergehenden zusammenfällt, und sie daher schon an sich eine gebrochene Linie bilden, wie z. B. die Linien AB, BC, CD, so wird die nach §. 2 zu vollziehende Operation überflüssig. Man hat dann geradezu

$$AB + BC = AC, \quad AB + BC + CD = AD, \text{ also auch}$$

$$AB + BC + CA = 0, \quad AC = AB - CB = BC - BA,$$

u. s. w. — Gleichungen, welche gelten, wie auch die Punkte A, B, C, D im Raume liegen mögen. — Vergl. meine «Elemente der Mechanik des Himmels,» §§. 1 und 2, und einen Aufsatz von mir in Crelle's Journal für Mathematik, Band 28, Seite 1.

INNERE MULTIPLICATION DER LINIEN.

§. 5.

Unter dem Producte zweier Linien wird hier, wie gewöhnlich, die Zahl von Flächeneinheiten verstanden, welche sich ergiebt, wenn man, nach Festsetzung einer gewissen Linie als Längeneinheit und des über dieser Linie zu construirenden Quadrats als Flächeneinheit, die zwei Zahlen in einander multiplicirt, nach welchen die zwei ersteren Linien von der Längeneinheit gemessen werden.

Das Product zweier Linien AB und CD, multiplicirt mit dem Cosinus des

Winkels, den die Richtungen der beiden Linien mit einander machen, heisst das *innere Product* der beiden Linien [1]) und wird ausgedrückt durch

$$AB \times CD;$$

oder, was dasselbe sagt: das innere Product zweier Linien AB und CD ist = dem Producte aus der einen Linie in die auf sie rechtwinklig projicirte andere Linie, also = dem Producte der Linien AB und $C'D'$, wenn C' und D' die rechtwinkligen Projectionen der Punkte C und D auf die Linie AB oder deren Verlängerung sind; und dieses Product ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem AB und $C'D'$ einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben.

§. 6.

Da das innere Product zweier Linien bloss von den Längen der letztern und dem Winkel ihrer Richtungen abhängt, so bleibt es ungeändert, wenn statt einer der beiden Linien, oder statt beider, andere gesetzt werden, welche mit ihnen von gleicher Länge und einerlei Richtung sind. Ist daher $AB = EF$ und $CD = GH$, so ist auch $AB \times CD = EF \times GH$. Aus gleichem Grunde erhellet, dass

$$\alpha(AB \times CD) = \alpha AB \times CD = AB \times \alpha CD \text{ ist.}$$

§. 7.

Aus dem Begriffe des innern Products folgt ferner, dass, wenn wir uns von zwei Linien die Längen constant, ihre gegenseitige Neigung aber veränderlich denken, ihr inneres Product null wird, wenn die eine Linie mit der andern einen rechten Winkel macht; dass es dagegen seinen grössten positiven (negativen) Werth erhält, wenn die Linien einerlei (entgegengesetzte) Richtungen haben, und dass dieser Werth, abgesehen vom Zeichen, dem Producte der Linien selbst gleich ist. — Das innere Product zweier Linien von gleicher Länge und einerlei Richtung ist das Quadrat der einen oder der andern Linie, welches man wie gewöhnlich durch den an den Linienausdruck rechts oben angesetzten Exponenten 2 bezeichne.

§. 8

Bedeuten a, b, f drei Linien von beliebiger Länge und Richtung, und sei $a + b = c$. Nach §. 2 Zus. ist alsdann die Projection von c auf eine beliebige Gerade der algebraischen Summe der Projectionen von a und b auf dieselbe Gerade gleich. Man hat daher, wenn man a, b und c auf f rechtwinklig projicirt, die algebraische Gleichung

---

1) Das Product einer Linie a in eine andere b, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels $a\hat{}b$, wird das *äussere Product* von a in b genannt (Grassmann's Ausdehnungslehre §. 38). Weil sin $b\hat{}a = -$ sin $a\hat{}b$, so sind die äussern Producte von a in b und von b in a einander gleich, aber entgegengesetzt, während, weil cos $b\hat{}a =$ cos $a\hat{}b$, der Werth eines innern Products bei Vertauschung seiner Factoren auch dem Zeichen nach ungeändert bleibt.

$$c \cos f\grave{}c = a \cos f\grave{}a + b \cos f\grave{}b, \text{ also auch}$$

$$fc \cos f\grave{}c = fa \cos f\grave{}a + fb \cos f\grave{}b.$$

Statt $fc \cos f\grave{}c$ kann man aber schreiben $f \times c$, $= f \times (a + b)$; statt $fa \cos f\grave{}a$, $f \times a$, u. s. w.; mithin ist

$$f \times (a + b) = f \times a + f \times b,$$

in welcher Gleichung das Pluszeichen zur Linken die in §. 3 angegebene geometrische Bedeutung, das Pluszeichen zur Rechten aber, so wie auch das Gleichheitszeichen, die gewöhnliche arithmetische hat. — Ueberhaupt ist, wie man hier noch bemerken mag, die Bedeutung des Gleichheitszeichens bei Gleichungen zwischen innern Producten von der gewöhnlichen nicht verschieden; denn es zeigt die Gleichheit der zu beiden Seiten stehenden Zahlen von Flächeneinheiten an, während es bei Gleichungen, deren Glieder bloss Linien sind, sich noch auf die Richtung bezieht. So ist z. B., wenn die zwei Linien a und b gleich lang sind, nur dann $a = b$, wenn sie auch einerlei Richtungen haben; dagegen immer $a^2 = b^2$, welches auch ihre Richtungen sein mögen.

Kommt zu den obigen drei Linien a, b, f eine vierte g hinzu, so hat man gleicherweise:

$$(f + g) \times (a + b) = (f + g)a + (f + g)b$$
$$= f \times a + g \times a + f \times b + g \times b,$$

und eben so lassen sich Producte aus Summen noch mehrerer Linien ganz nach den Regeln der Arithmetik in Partialproducte zerlegen; oder, was dasselbe ausdrückt: die Rechnung mit beliebig gerichteten Linien wird nicht allein bei ihrer geometrischen Addition, sondern auch bei ihrer innern Multiplication vollkommen so geführt, *als ob alle Linien in einer und derselben Geraden enthalten wären.*

Um ein ganz einfaches Beispiel hinzuzufügen, so hat man, wenn $a + b = c$ gesetzt wird: $a^2 + 2a \times b + b^2 = c^2$. Stehen dabei a und b rechtwinklig auf einander, so wird $a \times b = 0$, und damit $a^2 + b^2 = c^2$, wodurch, wie man sogleich wahrnimmt, der pythagoräische Lehrsatz bewiesen ist.

VON PUNKTGRÖSSEN UND GRÖSSEN ERSTER STUFE ÜBERHAUPT.

§. 9.

Wenn in einer Gleichung zwischen Linien zwei oder mehrere derselben einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, und wenn die Gleichung die Eigenthümlichkeit besitzt, dass sie gültig bleibt, wo auch der gemeinsame Anfangspunkt angenommen werden mag, während die Endpunkte dieser Linien und die Anfangs- und Endpunkte der übrigen Linien bestimmte Punkte sind, so werden erstere Linien *Punktgrössen*, und ihre bestimmten Endpunkte die

Oerter der Punktgrössen genannt. — Der gemeinsame, aber unbestimmt bleibende Anfangspunkt der Punktgrössen soll hier immer mit X bezeichnet werden.

Linien von bestimmter Länge und Richtung heissen *Strecken.*

So ist z. B , wo auch X liegen mag: $XB - XA = AB$, d. h. die Differenz zweier Punktgrössen, deren Oerter B und A sind, ist einer der Linie AB gleichen und gleichgerichteten Strecke gleich.

Ist ferner C der Mittelpunkt von AB, so hat man für jeden Ort von X:

$$XC - XA = AC = CB = XB - XC, \text{ und daher}$$

$$XA + XB = 2XC,$$

d. h. die Summe zweier Punktgrössen ist dem Doppelten einer Punktgrösse gleich, deren Ort der Mittelpunkt zwischen den Oertern der erstern ist.

Bei der Rechnung mit Punktgrössen kann man der Kürze willen den den gemeinschaftlichen Anfangspunkt dieser Linien bezeichnenden Buchstaben X überall weglassen und daher statt der vorigen zwei Gleichungen auch schreiben:

$$B - A = AB, \quad A + B = 2C.$$

Doch werde ich im Folgenden, wo bloss die Theorie der Punktgrössen aufgestellt, und keine Anwendungen dieser Theorie gegeben werden sollen, von dieser abgekürzten Schreibart keinen Gebrauch machen.

§. 10.

In den Gleichungen, mit denen wir uns gegenwärtig beschäftigen, ist entweder jedes Glied eine *Grösse erster Stufe,* d. i. eine Linie, oder jedes Glied eine *Grösse zweiter Stufe,* d. i. ein inneres Product zweier Linien. Hiernach, und weil jede Linie entweder eine Strecke oder eine Punktgrösse ist, wird die allgemeine Form einer Gleichung der erstern Art sein:

$$(1) \qquad k + \alpha XA + \alpha' XA' + \ldots = 0.$$

Hierin bezeichnet nämlich k die Summe aller der Glieder, welche Strecken sind, eine Summe, die nach dem, was über die Addition von Linien gesagt worden, ebenfalls eine Strecke, oder auch null ist. Die folgenden Glieder sind Punktgrössen, mit den numerischen Coefficienten oder *Gewichten* $\alpha, \alpha', \ldots$ begleitet, statt deren Summe mit Anwendung des Summationszeichens kurz $\Sigma\alpha XA$ geschrieben werde.

Suchen wir nun zuerst die zum Bestehen einer solchen Gleichung nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zu ermitteln. — Man hat, wo auch der Punkt O liegen mag:

$$XA = OA - OX, \quad XA' = OA' - OX, \text{ u. s. w.,}$$

und es kann daher statt (1) auch geschrieben werden:

$$(2) \qquad k + \Sigma\alpha(OA - OX) = 0, \text{ d. i. } k + \Sigma\alpha OA - \Sigma\alpha \cdot OX = 0.$$

Bedeute nun O einen willkührlich bestimmten Punkt. Weil die mit (1) identische Gleichung (2) für jeden Ort von X, also auch, wenn X mit O

zusammenfällt, bestehen muss, so hat man als erste nothwendige Bedingung die Gleichung:

$$k + \Sigma\alpha OA = 0.$$

Hieraus, in Verbindung mit (2), folgt, wenn X mit O nicht zusammenfällt:

$$\Sigma\alpha \cdot OX = 0, \text{ mithin } \Sigma\alpha = 0.$$

Die nothwendigen und, wie man sieht, zugleich hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Gleichung (1) sind daher: erstens dass sie besteht, wenn statt X ein bestimmter Punkt O gesetzt wird, und zweitens dass die Gewichtssumme der Punktgrössen null ist.

Zum deutlichern Verständniss des bei dieser Untersuchung befolgten Weges denke man sich (§. 8) alle Strecken, deren Summe k ist, und die Punkte $X, A, A', \ldots$ insgesammt in einer Geraden liegend, und den eingeführten Hülfspunkt O als Anfangspunkt der Geraden. Alsdann sind $OX, OA, OA', \ldots$ die Abscissen der Punkte $X, A, A', \ldots$, welche Abscissen man $= x, a, a', \ldots$ setze. Dadurch verwandelt sich (2) in die algebraische Gleichung

$$k + \Sigma\alpha(a - x) = 0, \text{ d. i. in } M - \mu x = 0,$$

wo $M = k + \Sigma\alpha a$ und $\mu = \Sigma\alpha$; und diese Gleichung wird für jeden Werth von x, mithin (2) oder (1) für jeden Ort von X richtig sein, wenn — übereinstimmend mit dem Vorigen — jede der beiden Grössen M und μ für sich null ist.

§. 11.

Wie vorhin bemerkt worden, ist eine Summe von Strecken immer auf eine einzige Strecke reducirbar. Untersuchen wir jetzt die einfachste Form, auf welche eine Summe von Punktgrössen $\Sigma\alpha XA$ reducirt werden kann. — Es wird diese Summe, wenn wir, wie vorhin, den willkührlich zu bestimmenden Punkt O einführen,

$$= \Sigma\alpha(OA - OX) = \Sigma\alpha OA - \mu OX,$$

wo $\mu = \Sigma\alpha$. Ist daher erstens die Gewichtssumme $\mu = 0$, so wird

$$\Sigma\alpha XA = \Sigma\alpha OA$$

= einer von X (und eben so auch von O) unabhängigen Summe von Linien = einer Strecke, welche auch $= 0$ sein kann.

Ist zweitens die Gewichtssumme μ nicht $= 0$, so setze man an O eine Linie

$$OM = \frac{1}{\mu} \Sigma\alpha OA.$$

Hiermit wird $\Sigma\alpha OA = \mu OM$, und folglich

$$\Sigma\alpha XA = \mu OM - \mu OX = \mu XM$$

= einer Punktgrösse, deren Gewicht μ die Gewichtssumme der zu addirenden

Punktgrössen, und deren Ort M, ebenso wie von X, auch von O selbst unabhängig ist; es ist der *Schwerpunkt* der in den Punkten A, A', ... angebrachten Gewichte α, α', ...

Eine Summe von Punktgrössen ist demnach entweder $= 0$, oder $=$ einer Strecke, oder $=$ einer Punktgrösse; und zwar tritt der erste, oder der zweite Fall ein, wenn die Gewichtssumme der Punktgrössen $= 0$, der dritte, wenn sie nicht $= 0$ ist.

Wir können daher noch umgekehrt schliessen, dass, jenachdem eine Summe von Punktgrössen auf eine Strecke, welche auch null sein kann, oder auf eine Punktgrösse reducirbar ist, die Gewichtssumme der erstern entweder null, oder nicht null ist.

§. 12.

Die Summe einer Strecke KL und einer Punktgrösse μXM lässt sich immer auf eine Punktgrösse reduciren, deren Gewicht dem Gewichte μ der erstern Punktgrösse gleich ist. Dann setzt man an M eine Linie $MN = \frac{1}{\mu} KL$, so wird

$$KL + \mu XM = \mu XM + \mu MN = \mu XN.$$

Durch Verbindung dieses Satzes mit den im vorigen §. erhaltenen Resultaten ziehen wir noch den Schluss, dass ebenso, wie eine Summe von Punktgrössen allein, so auch eine Summe von Strecken und Punktgrössen, also eine Summe von Grössen erster Stufe überhaupt, jenachdem die Gewichtssumme der Punktgrössen null, oder nicht null ist, auf eine Strecke, oder auf eine Punktgrösse mit einem jener Gewichtssumme gleichen Gewichte reducirbar ist. Auch folgt dasselbe schon daraus, dass eine Strecke sich als eine Summe zweier Punktgrössen, deren Gewichtssumme null ist, ausdrücken lässt, wie $\alpha KL = \alpha XL - \alpha XK$, und dass man daher eine Summe von Strecken und Punktgrössen als eine Summe von Punktgrössen allein darstellen kann, deren Gewichtssumme von der der Punktgrössen in der erstern Summe nicht verschieden ist.

VON GRÖSSEN ZWEITER STUFE.

§. 13.

Eine Grösse zweiter Stufe, d. i. ein inneres Product zweier Linien (§. 10), ist entweder ein inneres Product zweier Strecken, also eine bestimmte Zahl von Flächeneinheiten, oder ein inneres Product aus einer Strecke in eine Punktgrösse, wie $AB \times XC$, oder ein inneres Product zweier Punktgrössen, wie $XA \times XB$.

Es ist aber (§. 8)

$$AB \times XC = \tfrac{1}{4}(XC + AB)^2 - \tfrac{1}{4}(XC - AB)^2,$$

und wenn man an C zwei Linien $CE = AB$ und $CD = -AB = BA$ setzt, so dass C der Mittelpunkt einer mit AB gleichgerichteten und doppelt so langen Linie DE wird:

$$AB \times XC = \tfrac{1}{4}(XC + CE)^2 - \tfrac{1}{4}(XC + CD)^2 = \tfrac{1}{4}XE^2 - \tfrac{1}{4}XD^2.$$

Ferner ist:

$$XA \times XB = \tfrac{1}{4}(XA + XB)^2 - \tfrac{1}{4}(XB - XA)^2 = XM^2 - \tfrac{1}{4}AB^2,$$

wenn M den Mittelpunkt von AB bezeichnet (§. 9).

Man ersieht hieraus, wie eine Summe von Grössen zweiter Stufe stets als eine Summe von innern Streckenproducten und von Quadraten von Punktgrössen darstellbar ist.

§. 14.

Hiernach, — und weil einer Summe von innern Streckenproducten, als einer Summe von Zahlen von Flächeneinheiten, ein einziges inneres Streckenproduct substituirt werden kann, — wird eine Gleichung, in welcher jedes Glied eine Grösse zweiter Stufe ist, stets unter die Form

$$(1) \qquad \Delta + \Sigma\alpha XA^2 = 0$$

gebracht werden können, wo Δ ein inneres Streckenproduct bedeutet. Um die Bedingungen für die Richtigkeit einer solchen Gleichung zu finden, wollen wir, wie in §. 10 bei Gleichungen erster Stufe, den willkührlich zu bestimmenden Punkt O einführen und $OA - OX$ statt XA schreiben; hierdurch wird die Gleichung:

$$\Delta + \Sigma\alpha OA^2 - 2(\Sigma\alpha OA) \times OX + \Sigma\alpha \,.\, OX^2 = 0.$$

Soll diese für jeden Ort von X Gültigkeit haben, so muss sie erstens noch bestehen, wenn X mit O zusammenfällt; es muss folglich sein

$$\Delta + \Sigma\alpha OA^2 = 0, \text{ und nächstdem}$$

$$(2) \qquad 2(\Sigma\alpha OA) \times OX - \Sigma\alpha \,.\, OX^2 = 0.$$

Aus letzterer Gleichung können wir aber hier nicht, wie in der Algebra, schliessen, dass von den zwei Factoren des zur Linken Stehenden

$$2(\Sigma\alpha OA) - \Sigma\alpha \,.\, OX \text{ und } OX$$

wenigstens einer null sein müsse, indem das innere Product aus ihnen auch dann null ist, wenn die zwei Linien, welche sie ausdrücken, einen rechten Winkel mit einander machen (§. 7). Um dieser Zweideutigkeit auszuweichen, wollen wir den Ort von X dergestalt wählen, dass die Linie OX auf der Strecke $\Sigma\alpha OA$, falls diese nicht null sein sollte, perpendikular steht. Hierdurch wird in (2) das erste Glied zur Linken $= 0$, und es muss, damit diese Gleichung auch für einen also gewählten Ort von X richtig bleibe, $\Sigma\alpha \,.\, OX^2 = 0$, folglich jedenfalls $\Sigma\alpha = 0$ sein. Sie selbst reducirt sich damit auf

$$2(\Sigma\alpha OA) \times OX = 0,$$

eine Gleichung, welche für jeden Ort von X nur dann und dann immer besteht, wenn $\Sigma\alpha OA = 0$ ist.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Richtigkeit von (1) sind demnach:

$$(a)\ \mathit{A} + \Sigma\alpha OA^2 = 0,\ (b)\ \Sigma\alpha = 0,\ (c)\ \Sigma\alpha OA = 0.$$

Statt (b) und (c) kann man aber die einzige Gleichung

$$\Sigma\alpha XA = 0$$

setzen, als für deren Richtigkeit (b) und (c) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind (§. 10).

Die Bedingungen für die Richtigkeit der Gleichung (1) sind daher *erstens* die Gleichung (a) oder die Bedingung, dass (1) noch besteht, wenn für X ein bestimmter Punkt gesetzt wird; und *zweitens,* dass die Summe $\Sigma\alpha XA$, welche die *Mittelgrösse* von $\mathit{A} + \Sigma\alpha XA^2$ genannt wird, null ist.

§. 15.

Ehe wir weiter gehen, wird es gut sein, den neuen Begriff der Mittelgrösse etwas näher ins Auge zu fassen. Nach der eben aufgestellten Definition der Mittelgrösse von $\mathit{A} + \Sigma\alpha XA^2$ ist die Mittelgrösse von A, d. i. von einem innern Streckenproducte, null. Weil ferner (§. 13)

$$AB \times XC = \tfrac{1}{4}(XC + AB)^2 - \tfrac{1}{4}(XC - AB)^2, \text{ und}$$

$$XA \times XB = XM^2 - \tfrac{1}{4}AB^2, \text{ wo } M \text{ der Mittelpunkt von } AB:$$

so ist von $AB \times XC$ die Mittelgrösse

$$= \tfrac{1}{4}(XC + AB) - \tfrac{1}{4}(XC - AB) = \tfrac{1}{2}AB,$$

und von $XA \times XB$ die Mittelgrösse $= XM$.

Hiernach lässt sich von einer Summe von Grössen zweiter Stufe, ohne dieselbe vorher in die Form $\mathit{A} + \Sigma\alpha XA^2$ umgewandelt zu haben, die Mittelgrösse als die Summe der Mittelgrössen der einzelnen Glieder jener Summe unmittelbar angeben.

Anmerkung. Man könnte die Mittelgrösse einer andern gegebenen Grösse auch folgendergestalt definiren. — Angenommen, dass X' irgend ein dem X unendlich nahe liegender Punkt ist, so wird durch den Uebergang des X in X' die gegebene Grösse um ein unendlich Weniges ihren Werth ändern. Diese Aenderung lässt sich als ein inneres Product darstellen, von welchem die unendlich kleine Linie $X'X$ der eine Factor ist. Der andere Factor, halb genommen, heisst die Mittelgrösse der gegebenen.

So ist von $AB \times XC$ die Aenderung

$$= AB \times X'C - AB \times XC = AB \times X'X,$$

und daher $\frac{1}{2}AB$ die Mittelgrösse von $AB \times XC$.

Ferner ist von $XA \times XB$ die Aenderung

$= (X'X + XA) \times (X'X + XB) - XA \times XB = X'X \times (XA + XB) + X'X^2$;

also, nach Weglassung des gegen das erste unendlich kleinen zweiten Gliedes, die Mittelgrösse von $XA \times XB$, $= \frac{1}{2}(XA + XB) = XM$.

Eben so findet sich die Mittelgrösse von XA^2, $= XA$; von XA, $= \frac{1}{2}$; u. s. w.

§. 16.

Der in §. 14 erhaltene Satz lässt sich auch folgendergestalt ausdrücken: zwei Summen von Grössen zweiter Stufe sind nur dann und dann immer einander gleich, wenn Gleichheit zwischen ihnen besteht, sobald für X ein bestimmter Punkt gesetzt wird, und wenn die Mittelgrössen beider Summen einander gleich sind; — ein Satz, der übrigens wörtlich auch für zwei Summen von Grössen erster Stufe gilt, indem die Mittelgrösse einer solchen Summe nach der in voriger Anmerkung gegebenen Definition die halbe Summe der Gewichte der in ersterer Summe enthaltenen Punktgrössen ist.

Mittelst dieses Criteriums der Gleichheit kann man von einer gegebenen Summe von Grössen zweiter Stufe, welche wie im Vorigen durch $\Delta + \Sigma\alpha XA^2$ ausgedrückt werde, die Reduction auf die einfachste Form sehr leicht bewerkstelligen. Unterscheiden wir die drei hierbei allein möglichen Fälle (§. 11), jenachdem die Mittelgrösse $\Sigma\alpha XA$ der gegebenen Summe entweder $= 0$, oder $=$ einer Strecke k, oder $=$ einer Punktgrösse μXM ist, und bezeichnen wir der Kürze willen die Summe $\Delta + \Sigma\alpha XA^2$, als eine von X abhängige Grösse, mit $[X]$; also auch $\Delta + \Sigma\alpha OA^2$ mit $[O]$.

Im ersten Falle ist

$$(a) \qquad [X] = [O],$$

d. h. $=$ einem innern Streckenproducte. Denn diese Gleichung bleibt richtig, wenn statt X der bestimmte Punkt O gesetzt wird. Ferner ist die Mittelgrösse der linken Seite der Gleichung $= 0$ nach der Voraussetzung; die der rechten Seite ist es, weil die rechte von X unabhängig ist. Es sind daher auch die Mittelgrössen beider Seiten einander gleich; folglich u. s. w.

Im zweiten Falle wird man setzen können:

$$(b) \qquad [X] = 2k \times XN.$$

Denn das innere Product $k \times ON$, in welchem k eine gegebene Strecke und O ein bestimmter Punkt ist, kann nach verschiedener Annahme des Punktes N alle möglichen Werthe erhalten. Es wird daher immer N so bestimmt werden können, dass

$$[O] = 2k \times ON.$$

Hierdurch geschieht der ersten Bedingung für die durch (b) ausgedrückte Gleichheit Genüge. Es wird aber auch die zweite Bedingung erfüllt, weil die Mittelgrösse der einen, wie der andern Seite von (b), $= k$ ist.

Ist endlich drittens die Mittelgrösse der gegebenen Summen $= \mu XM$, so setze man, damit auf beiden Seiten die Mittelgrössen einander gleich werden:

$$(c) \qquad [X] = \mu(\Gamma + XM^2),$$

wo Γ ein inneres Streckenproduct bedeutet, dessen Werth wegen der übrigen noch zu erfüllenden Bedingung so zu bestimmen ist, dass Gleichheit noch herrscht, wenn statt X ein bestimmter Punkt O gesetzt wird, und woraus

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[O] - OM^2$$

folgt. — Eine Summe von Grössen zweiter Stufe lässt sich daher, jenachdem ihre Mittelgrösse entweder null, oder eine Strecke, oder eine Punktgrösse ist, auf ein inneres Streckenproduct, oder auf ein inneres Product einer Strecke in eine Punktgrösse, oder auf die Summe eines Punktquadrats und eines innern Strekkenproducts reduciren.

§. 17.

Zusätze und Erläuterungen. 1. Die Bedingung $\Sigma\alpha XA = 0$, welche für den ersten der drei jetzt betrachteten Fälle stattfindet, drückt aus, dass von den Punkten A, A', ... mit den an ihnen angebrachten Gewichten α, α', ... jeder der Schwerpunkt der jedesmal übrigen ist [1]). Wird diese Bedingung erfüllt, so ist zufolge (a) die Summe $[X]$, folglich auch $\Sigma\alpha XA^2$, von X unabhängig; d. h. die Summe der mit den respectiven Gewichten multiplicirten Quadrate der Entfernungen der Punkte A, A', ... von einem und demselben Punkte X ist für jeden Ort von X von gleicher Grösse. — Mehrere aus diesem schon früher bekannten merkwürdigen Satze von mir abgeleitete Folgerungen findet man in Crelle's Journal für Mathematik, Band 26, Seite 26.

2. Im zweiten Falle, wo die Mittelgrösse von $[X]$ eine Strecke k ist, war ein Punkt N dergestalt zu bestimmen, dass die Gleichung $[O] = 2k \times ON$ befriedigt wurde. Dieses kann aber auf unzählige Weisen geschehen. Denn für einen von N verschiedenen Punkt N_1 wird gleichfalls $[O] = 2k \times ON_1$ sein, wenn $k \times ON_1 - k \times ON = 0$, d. i. $k \times NN_1 = 0$ ist, also wenn die Linie NN_1 gegen die Strecke k eine perpendikulare Lage hat (§. 7), oder, anders ausgedrückt: wenn N_1 mit N in einer und derselben die Strecke k rechtwinklig schneidenden Ebene liegt.

Auf gleiche Art erhellet, dass der Werth des Products aus einer Strecke in eine Punktgrösse, wie $k \times XN$ bei Aenderung des Ortes N der letztern dann und nur dann sich nicht ändert, wenn der neue Punkt N_1 in einer durch N gelegten die Strecke k rechtwinklig schneidenden Ebene enthalten ist. Denn für jeden Punkt N_1 dieser Ebene, und für keinen andern, ist die Projection von XN_1 auf k von der nämlichen Grösse (§. 5). Man nennt deshalb das Product aus einer Strecke in eine Punktgrösse eine *Plangrösse,* und die durch die Richtung der Strecke und den Ort der Punktgrösse auf gedachte Weise bestimmte Ebene die *Factorenfläche* der Plangrösse.

---

1) Denn weil, wenn $\Sigma\alpha XA = 0$, immer auch $\Sigma\alpha = 0$ und daher $\alpha' + \alpha'' + \ldots = -\alpha$ ist (§. 11), so ist erstere Gleichung unter andern identisch mit

$$\alpha' XA' + \alpha'' XA'' + \ldots = -\alpha XA = (\alpha' + \alpha'' + \ldots.) XA,$$

wonach A der Schwerpunkt der in A', A'', ... befindlichen Gewichte α', α'', ... ist.

3. Bei dem dritten Falle, wo $[X]$ auf die μfache Summe eines innern Streckenproducts I' und eines Punktquadrats XM^2 reducirbar ist, sind zwei Unterfälle zu unterscheiden, jenachdem das Streckenproduct I' negativ oder positiv ist.

Ist es negativ, so lässt sich die Summe $XM^2 + I'$ auf ein einziges Glied zurückführen. Man ziehe nämlich durch M eine Linie nach beliebiger Richtung und bestimme darin zwei von M nach entgegengesetzten Richtungen gleichweit entfernte Punkte K und L so, dass $MK^2 = ML^2 = -I'$; hierdurch wird

$$XM^2 + I' = (XM + MK) \times (XM - MK)$$
$$= (XM + MK) \times (XM + ML) = XK \times XL,$$

und folglich $[X] = \mu XK \times XL =$ dem μfachen des innern Products zweier Punktgrössen, deren Oerter K und L aus M und I' so zu bestimmen sind, dass $KL^2 = -4I'$, und KL von M halbirt wird, oder mit andern Worten: dass K und L die zwei Endpunkte irgend eines Durchmessers einer Kugel sind, deren Halbmesser $= \sqrt{-I'}$ und deren Mittelpunkt M ist. Wie man hieraus zugleich ersieht, besitzt das Product zweier Punktgrössen $XK \times XL$ die merkwürdige Eigenschaft, dass es ungeändert bleibt, wenn statt K und L die Endpunkte irgend eines andern Durchmessers der um KL als Durchmesser beschriebenen Kugel gesetzt werden. Es wird aus diesem Grunde das innere Product zweier Punktgrössen eine *Kugelgrösse*, und die Fläche der Kugel die *Factorenfläche* der Kugelgrösse genannt. Die Mittelgrösse der letztern ist XM oder die Punktgrösse, welche zu ihrem Orte der Kugel Mittelpunkt hat.

Ist I' positiv, so wird der Halbmesser der Kugel imaginär. Untersuchen wir daher, ob sich nicht in diesem Falle die Summe $XM^2 + I'$ an eine Kugel knüpfen lässt, welche gleichfalls M zum Mittelpunkte und einen Halbmesser hat, dessen Quadrat $= I'$ ist. In der That findet sich, wenn K und L die Endpunkte irgend eines Durchmessers dieser Kugel bezeichnen:

$$XM^2 + I' = XM^2 + MK^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(XM + MK)^2 + \tfrac{1}{2}(XM - MK)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(XM + MK)^2 + \tfrac{1}{2}(XM + ML)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}XK^2 + \tfrac{1}{2}XL^2.$$

Die Summe der Quadrate zweier Punktgrössen $\frac{1}{2}(XK^2 + XL^2)$ besitzt hiernach dieselbe Eigenschaft, wie das innere Product dieser Grössen $XK \times XL$, und wird deshalb gleichfalls eine *Kugelgrösse* genannt. Auch ist wie vorhin der Ort ihrer Mittelgrösse der Kugel Mittelpunkt. Die Summe $[X]$ aber wird $= \frac{\mu}{2}(XK^2 + XL^2)$.

4. Nach diesem allen können wir das am Schlusse des vorigen §. gewonnene Resultat kurz also aussprechen: Jenachdem von einer Summe von Grössen zweiter Stufe die Mittelgrösse null, oder eine Strecke, oder eine Punktgrösse ist, ist die Summe selbst ein inneres Streckenproduct, oder eine Plangrösse, oder eine Kugelgrösse.

§. 18.

Wir haben im vorigen §. Bedingungen kennen gelernt, unter denen die Functionen von Punktgrössen $XK \times XL$ und $XK^2 + XL^2$ bei Aenderung der Oerter ihrer Punkte K und L unverändert bleiben. Es lässt sich leicht darthun, dass jene Bedingungen zugleich die einzigen sind, unter denen die bemerkten Functionen ihre Werthe unverändert behalten.

Denn soll $XK \times XL$ sich nicht ändern, wenn statt K, L die Punkte F, G gesetzt werden, soll also die Gleichung

$$XK \times XL = XF \times XG$$

bestehen, so müssen (§. 16) erstens die Mittelgrössen beider Seiten einander gleich sein, also (§. 15) $XM = XH$, wenn M und H die Mittelpunkte von KL und FG bezeichnen. Hieraus folgt $XM - XH = HM = 0$, d. h. die Mittelpunkte von KL und FG müssen zusammenfallen. Die zweite noch zu erfüllende Bedingung für das Bestehen der Gleichung ist ihre Richtigkeit, wenn für X ein bestimmter Punkt gesetzt wird. Nehmen wir als solchen den gemeinschaftlichen Mittelpunkt M der Linien KL und FG, so findet sich, weil $-MK = ML = \frac{1}{2} KL$ und $-MF = MG = \frac{1}{2} FG$ ist: $KL^2 = FG^2$, d. h. KL und FG müssen gleich lang sein. Zum Bestehen der Gleichung ist es daher nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig, dass KL und FG Durchmesser einer und derselben Kugel sind.

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich die nämliche Bedingung als hinreichend und nothwendig für das Bestehen der Gleichung

$$XK^2 + XL^2 = XF^2 + XG^2.$$

Denn hieraus folgt die zwischen den Mittelgrössen zu erfüllende Gleichung

$$XK + XL = XF + XG,$$

d. i. $XM = XH$, wo M und H die vorige Bedeutung haben. Wie vorhin müssen daher KL und FG einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und es kommt, wenn man diesen Punkt in der erstern Gleichung für X substituirt: $KL^2 = FG^2$; folglich u. s. w.

Als Zugabe zu diesen Betrachtungen wollen wir noch zu ermitteln suchen, wie überhaupt bei der Summe zweier Punktquadrate mit beliebigen Coefficienten, wie $\alpha XA^2 + \beta XB^2$, die Punkte A und B geändert werden können, ohne dass sich die Summe selbst ändert. — Soll, wenn man A und B in C und D verwandelt, noch sein:

$$(a) \qquad \alpha XA^2 + \beta XB^2 = \alpha XC^2 + \beta XD^2,$$

so muss zuvörderst die Gleichung zwischen den Mittelgrössen beider Summen

$$\alpha XA + \beta XB = \alpha XC + \beta XD$$

bestehen. Mit Ausschliessung des Falles, wenn $\alpha + \beta = 0$ ist, und wo die Summen in (a) Plangrössen werden (§. 13 und §. 17, 2), kann man aber setzen (§. 11):

$$\alpha XA + \beta XB = (\alpha + \beta) XM, \text{ also auch}$$

$$\alpha XC + \beta XD = (\alpha + \beta) XM.$$

Hieraus folgt, wenn man X mit M zusammenfallen lässt:

(b) $$\alpha MA + \beta MB = 0,$$

(c) $$\alpha MC + \beta MD = 0.$$

Weil nach (b) die Linien MA und MB einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben (§. 1), so muss M ein Punkt der Geraden AB, und eben so nach (c) ein Punkt der Geraden CD sein. Beide Gerade müssen sich daher in einem Punkte M schneiden, und dieses so, dass

(d) $$AM : MB : AB = CM : MD : CD = \beta : \alpha : \alpha + \beta;$$

oder, was dasselbe ausdrückt: der Schwerpunkt der Gewichte α und β, mögen diese in A und B, oder in C und D angebracht werden, muss ein und derselbe Punkt M sein. —

Zweitens muss die Gleichung richtig sein, welche aus (a) hervorgeht, wenn statt X ein bestimmter Punkt, er sei M, gesetzt wird, also die Gleichung:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha MC^2 + \beta MD^2.$$

Substituirt man hierin für MB und MD ihre aus (b) und (c) fliessenden Werthe, so kommt

$$MA^2 = MC^2,$$

mithin auch $MB^2 = MD^2$ und $AB^2 = CD^2$, wegen der Proportion (d). Dies führt uns zu folgendem Resultate:

Man theile die Linie AB in M nach dem Verhältnisse $\beta : \alpha$ und beschreibe um M als Mittelpunkt mit MA und MB als Halbmessern zwei Kugelflächen; und es wird die Summe $\alpha XA^2 + \beta XB^2$ bei Aenderung der Oerter von A und B dann und nur dann ungeändert bleiben, wenn die neuen Oerter C und D eben so, wie A und B selbst, die Durchschnitte einer beliebig durch M gelegten Geraden mit der ersten und zweiten Kugelfläche sind; nur müssen, jenachdem das Verhältniss $\beta : \alpha$ positiv oder negativ ist, und daher A und B auf verschiedenen oder einerlei Seiten von M liegen, dieselbe Lage gegen M auch C und D haben.

§. 19.

Der in §. 16 bewiesene Satz, die Reduction einer Summe von Grössen zweiter Stufe betreffend, hätte auch auf ähnliche Weise, wie der entsprechende Satz für Grössen erster Stufe in §. 11 und 12, und somit auf einem mehr directen Wege dargethan werden können. Ich halte es jedoch für überflüssig, bei der hierzu nöthigen Rechnung mich aufzuhalten, und will nur noch zeigen, wie die Reduction einer Summe zweiter Stufe in den einfacheren Fällen unmittelbar ausgeführt werden kann.

1. Die Summe einer Plangrösse, wie $AB \times XC$, und eines innern Streckenproducts ist auf eine Plangrösse reducirbar. — Denn das innere Streckenproduct kann man $= AB \times CD$ setzen, als welches Product nach der ver-

schiedenen Annahme von D jedweden Werth haben kann. Hierdurch aber wird die Summe

$$= AB \times XC + AB \times CD = AB \times XD.$$

2. Die Summe zweier und folglich auch mehrerer Plangrössen ist auf eine Plangrösse reducirbar. — Denn die Summe

$$(S) \quad \ldots \quad AB \times XF + DE \times XG$$

wird, wenn man an B eine Linie BC, $= DE$, setzt,

$$= AB \times XF + BC\,(XF + FG)$$
$$= AC \times XF + BC \times FG$$

= einer Plangrösse, nach vorigem Satze.

Die Summation zweier Plangrössen lässt sich auch noch auf folgende etwas einfachere Weise bewerkstelligen. Weil, wenn AB der Streckenfactor und L irgend ein Punkt der Faktorenfläche einer Plangrösse ist, letztere selbst $AB \times XL$ ist, so erhält man als die Summe zweier Plangrössen, wenn AB und DE deren Streckenfactoren und L ein den Factorenflächen beider gemeinschaftlicher Punkt, also irgend ein Punkt in der Durchschnittslinie beider Flächen ist,

$$AB \times XL + DE \times XL, \; = (AB + DE) \times XL = AC \times XL,$$

wenn man, wie vorhin, $BC = DE$ macht.

Nur in dem Falle, wenn die zwei Factorenflächen einander parallel sind, leidet dieses Summationsverfahren keine Anwendung. Alsdann sind aber auch die zwei auf ihnen perpendikularen Streckenfactoren AB und DE einander parallel, und man kann daher (§. 1) $DE = \alpha AB$ setzen. Hierdurch wird die Summe (S)

$$= AB \times XF + \alpha AB \times XG$$
$$= AB \times (XF + \alpha XG) = (1 + \alpha) AB \times XH,$$

also = einer Plangrösse, wenn man (§. 11)

$$XF + \alpha XG = (1 + \alpha) XH$$

setzt. Lässt man hierin X mit G zusammenfallen, so kommt: $GF = (1 + \alpha) GH$, und es ist daher der Punkt H in der Geraden FG so zu bestimmen, dass man $GH = \frac{1}{1 + \alpha} GF$ macht.

3. Die Summe von Punktquadraten αXA^2, $\alpha' XA'^2$, ..., deren Coefficienten α, α', ... Null zur Summe haben, lässt sich auf eine Plangrösse reduciren. Denn sei O ein beliebig bestimmter Punkt, so ist $\Sigma \alpha XO^2 = XO^2 \Sigma \alpha = 0$, wegen $\Sigma \alpha = 0$, und daher

$$\Sigma \alpha XA^2 = \Sigma \alpha (XA^2 - XO^2)$$
$$= \Sigma \alpha (XA + XO) \times (XA - XO).$$

Es ist aber, wenn $M, M', \ldots$ die Mittelpunkte von $OA, OA', \ldots$ bedeuten: $XA + XO = 2XM$, $XA' + XO = 2XM'$, u. s. w.; hiermit wird

$$\Sigma\alpha XA^2 = 2\Sigma\alpha OA \times XM,$$

d. i. = einer Summe von Plangrössen, = einer einzigen Plangrösse nach 2.

4. Weil $XM = OM - OX$, so kann man die letzterhaltene Gleichung auch schreiben:

$$\Sigma\alpha XA^2 = 2\Sigma\alpha OA \times OM - 2OX \times \Sigma\alpha OA.$$

Ist daher nicht allein $\Sigma\alpha$, sondern auch $\Sigma\alpha OA$ null, so wird

$$\Sigma\alpha XA^2 = 2\Sigma\alpha OA \times OM;$$

d. h. eine Summe von Punktquadraten $\Sigma\alpha XA^2$ lässt sich, wenn ihre Mittelgrösse $\Sigma\alpha XA$ null ist (als woraus $\Sigma\alpha OA = 0$ und $\Sigma\alpha = 0$ folgt), auf ein inneres Streckenproduct reduciren.

5. Ist $\Sigma\alpha$ nicht $= 0$, so wird nach 3.:

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha XA^2 &= \Sigma\alpha(XA^2 - XO^2) + \Sigma\alpha \cdot XO^2 \\ &= 2\Sigma\alpha OA \times XM + \Sigma\alpha \cdot XO^2\end{aligned}$$

= einer Plangrösse + einem Punktquadrate. Diese Summe lässt sich aber, auf ähnliche Art, wie $2ax + x^2$ in $(x + a)^2 - a^2$, in die Summe eines Punktquadrats und eines innern Streckenproducts umwandeln. Auf eine solche Summe ist folglich eine Summe von Punktquadraten, wenn die Summe der Coefficienten der letztern nicht null ist, stets reducirbar. Vergl. §. 16.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.